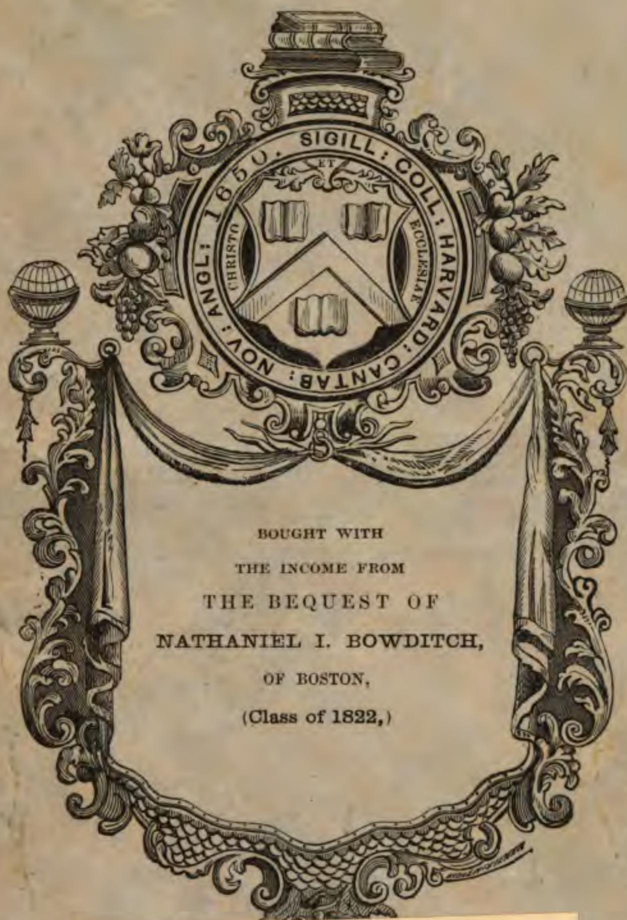

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



4th.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS SUR LES FONCTIONS DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

PIERRE BOUTROUX,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

AVEC UNE NOTE DE M. PAUL PAINLEVÉ.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
55, Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

LEÇONS SUR LES FONCTIONS

DÉFINIES PAR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

DU PREMIER ORDRE.

A LA MÊME LIBRAIRIE

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS,

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*), par M. ÉMILE BOREL; 1898.............. 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions entières, par M. ÉMILE BOREL; 1900..... 3 fr. 50

Leçons sur les séries divergentes, par M. ÉMILE BOREL; 1901..... 4 fr. 50

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France par M. ÉMILE BOREL, rédigées par M. *R. d'Adhémar;* 1902.. 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par M. ÉMILE BOREL, rédigées par M. *Ludovic Zoretti;* 1903.. 3 fr. 50

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France par M. HENRI LEBESGUE; 1904. 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'École Normale par M. ÉMILE BOREL, rédigées par M. *Maurice Fréchet,* avec des Notes de M. P. PAINLEVÉ et de M. H. LEBESGUE; 1905..................... 4 fr. 50

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France par M. RENÉ BAIRE et rédigées par M. *A. Denjoy;* 1905..... 3 fr. 50

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par M. ERNST LINDELÖF; 1905................................ 3 fr. 50

Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France par M. HENRI LEBESGUE; 1906................................ 3 fr. 50

SOUS PRESSE :

Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini, par M. OTTO BLUMENTHAL.

EN PRÉPARATION :

Sur l'inversion des intégrales définies, par M. VITO VOLTERRA.

Quelques principes fondamentaux de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, par M. PIERRE COUSIN.

Leçons sur les correspondances entre variables réelles, par M. JULES DRACH.

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par M. PAUL MONTEL.

Leçons sur la croissance des fonctions, par M. ÉMILE BOREL.

Leçons sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et son application à la théorie des nombres premiers, par M. HELGE VON KOCH.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS SUR LES FONCTIONS
DÉFINIES PAR
LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
DU PREMIER ORDRE

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

PIERRE BOUTROUX,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

AVEC UNE NOTE DE M. PAUL PAINLEVÉ.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
55, Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

42

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS SUR LES FONCTIONS

DÉFINIES PAR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

DU PREMIER ORDRE

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

PIERRE BOUTROUX,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

AVEC UNE NOTE DE M. PAUL PAINLEVÉ.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
55, Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

LEÇONS SUR LES FONCTIONS

DÉFINIES PAR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

DU PREMIER ORDRE.

grales de l'équation (2) sont les mêmes pour toutes ces intégrales (c'est-à-dire indépendants de la valeur initiale y_0 que prend au point initial x_0 l'une quelconque des intégrales). La situation de ces points, que M. Painlevé appelle *points singuliers fixes,* sera connue si l'on connaît les coefficients des puissances de y dans la fraction $\frac{P}{Q}\cdot$ Il est alors naturel de se demander s'il existe des équations (2) dont les intégrales ne présentent pas d'autres points singuliers que les points singuliers fixes ainsi déterminés. M. Painlevé démontre que seule l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = A_0 + A_1 y + A_2 y^2$$

est dans ce cas. En particulier, l'équation de Riccati est la seule équation (2) dont toutes les intégrales puissent être des fonctions uniformes de x.

Ce dernier théorème nous apprend que, si nous nous proposons d'étudier les intégrales d'une équation (2) qui ne soit pas une équation de Riccati, nous aurons affaire à des fonctions multiformes. Mais ne pouvons-nous espérer que ces fonctions n'auront qu'un nombre limité de branches, je veux dire qu'à une valeur quelconque de x ne correspondront qu'un nombre fini (n) de déterminations de y? M. Painlevé répond encore à cette question :

Si les intégrales d'une équation (2) *sont des fonctions à n branches, l'équation* (2) *se ramènera à une équation de Riccati par un changement de variable rationnel. On saura toujours reconnaître, au moyen d'un nombre fini d'opérations algébriques, si le changement de variable est ou n'est pas possible.*

Tel est l'état où se trouve, à la suite des travaux de M. Painlevé, l'étude de l'équation rationnelle (2) : 1° *à part un petit nombre d'équations qui se laissent ramener à l'équation de Riccati, les équations* (2) *définissent des fonctions multiformes possédant un nombre infini de branches;* 2° *sur la nature de ces fonctions multiformes, nous ne possédons, pour ainsi dire, aucune indication positive.* Nos connaissances à cet égard se réduisent aux propositions, d'un caractère purement local, qui ont trait aux points singuliers de Briot et Bouquet.

Cette double constatation ouvre devant nous un vaste champ de recherches. Comment explorer ce champ? Si les réflexions que nous avons faites plus haut sont justes, il conviendra de s'inspirer largement des vues nouvelles récemment introduites dans la théorie des fonctions.

On pourra commencer par particulariser le problème et se proposer, par exemple, d'étudier les intégrales de l'équation

$$\frac{dy}{dx} + A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0, \tag{3}$$

où les A sont des polynomes en x.

Les intégrales de (3) présentent, en général, une infinité de déterminations et une infinité de points singuliers. Nous ne saurons donc pas, d'ordinaire, former une expression analytique qui représente ces fonctions pour toutes les valeurs de la variable. Nous pourrions alors chercher à les représenter dans des régions de plus en plus étendues. Mais d'autres recherches devront être entreprises auparavant dont le type sera fourni par la théorie des fonctions entières.

Nous nous demanderons quel est le mode de croissance, l'allure d'une branche d'intégrale lorsque x s'approche d'un point singulier transcendant.

Nous étudierons, autour des valeurs limites, la condensation des points singuliers ou des déterminations des intégrales.

D'une manière générale, nous examinerons le mécanisme des permutations qui échangent entre elles les diverses branches de ces intégrales.

On le voit, ce ne sont pas les questions à traiter qui font défaut. Reste à savoir dans quelle mesure ces questions sont solubles. C'est ce dont je voudrais que nous cherchions à nous rendre compte au cours de ces leçons. Je me garderai d'entreprendre une classification et une discussion complètes. Je m'arrêterai principalement sur les types les plus simples d'équations (2), et je me demanderai quelles méthodes il serait bien possible d'imaginer pour les étudier, quels résultats on pourrait attendre de ces méthodes. Peut-être réussirai-je ainsi, sinon à résoudre le problème dont je viens d'esquisser l'énoncé, du moins à en montrer l'intérêt.



CHAPITRE I.

NOTIONS FONDAMENTALES.

I. — *Points où le théorème de Cauchy n'est pas applicable.*

J'ai fait allusion aux propositions capitales démontrées par M. Painlevé relativement à l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{1}$$

où P et Q sont des polynomes en y. C'est sur ces propositions que nous fixerons tout d'abord notre attention. Mais, au préalable, il nous faut dire quelques mots du théorème de Cauchy et des points où il cesse d'être applicable.

Soit x_0, y_0 un système de valeurs au voisinage duquel le coefficient différentiel $f(x, y)$ est holomorphe. L'existence d'une intégrale holomorphe unique, égale à y_0 pour $x = x_0$, est établie par le théorème de Cauchy, que nous énoncerons en ces termes [1] :

Soit $f(x, y)$ holomorphe dans le domaine $|x - x_0| \leqq r$, $|y - y_0| \leqq \rho$. Il existe une fonction de x satisfaisant à l'équation différentielle (1), *égale à y_0 pour $x = x_0$, et holomorphe autour de x_0 dans un cercle de rayon au moins égal* [2] *à* $r\left(1 - e^{\frac{-\rho}{2Mr}}\right)$.

Soit, d'autre part, L un chemin quelconque, de longueur finie ou infinie, convergeant vers x_0 (c'est-à-dire satisfaisant à la condition suivante : quelque petit que soit ε, il existe sur L un point x_1

(1) *Voir,* par exemple, PICARD, *Traité d'Analyse,* t. II, Chap. XI.

(2) La valeur exacte du rayon de convergence serait une valeur plus élevée. *Cf.* le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, Chap. XI.

tel que, à partir de x_1, le chemin L ne sorte plus du cercle de centre x_0 et de rayon ε). Imaginons qu'il existe une fonction de x qui satisfasse à l'équation différentielle (1) et qui, lorsque x tend vers x_0 sur le chemin L, tende vers la valeur y_0. *Cette fonction ne saurait être distincte de l'intégrale holomorphe définie dans la première partie du théorème* [1].

Du théorème de Cauchy on peut déduire le corollaire suivant :

Si $f(x, y)$ est holomorphe au voisinage de $x = x_0, y = y_0$, l'intégrale $y = \varphi(x, y'_0, x'_0)$, qui prend en x'_0 la valeur y'_0, est une fonction holomorphe des trois variables x, y'_0, x'_0, pour x et x'_0 voisins de x_0 et y'_0 voisin de y_0.

En effet, lorsque x'_0, y'_0 sont situés dans un certain domaine fini autour de x_0, y_0, $f(x, y)$ est développable par rapport aux puissances de $(x - x'_0)$, $(y - y'_0)$, les coefficients étant des fonctions holomorphes de x'_0 et y'_0. D'autre part, l'intégrale y est développable (au voisinage de $x = x_0$) par rapport aux puissances de $(x - x'_0)$ et les coefficients du développement sont (d'après le théorème de Cauchy) des fonctions rationnelles des coefficients de $f(x, y)$. On en conclut [2] que l'intégrale y est fonction holomorphe des trois variables $(x - x'_0)$, x'_0, y'_0.

Le théorème de Cauchy est en défaut lorsque la fonction $f(x, y)$ de x et y présente une singularité pour $x = x_0$, $y = y_0$. Les points x_0 où il en est ainsi se répartissent entre plusieurs catégories.

Première catégorie. — Supposons d'abord que $Q(x_0, y_0)$ *s'annule en x_0 pour une valeur isolée de y_0,* P *et* Q *étant holo-*

---

[1] Sur cette forme de l'énoncé du théorème de Cauchy, et sur le corollaire qui suit, *voir*, en particulier, les *Leçons de Stockholm* de M. Painlevé, p. 18.

[2] Je m'appuie sur la proposition suivante que l'on déduit des propriétés des fonctions de deux variables (*consulter*, par exemple, Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, chap. IX). Soit une fonction de deux variables, $g(x, \mu)$, développable sous la forme $g(x, \mu) = \Sigma g_i(\mu) x^i$, les coefficients g_i étant des fonctions holomorphes de μ pour $|\mu| < \tau$, et le développement convergeant absolument pour $|\mu| < \tau$, $|x| < r$: *g est une fonction holomorphe des deux variables x et μ pour $|x| < r$, $|\mu| < \tau$.*

morphes au voisinage de x_0, y_0, et $P(x_0, y_0)$ étant différent de zéro.

Pour étudier ce cas, bien connu, on considère l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \frac{1}{f(x, y)}.$$

Le coefficient différentiel de l'équation (2) est holomorphe au voisinage de x_0, y_0. D'ailleurs, puisque $Q(x_0, y)$ admet y_0 comme zéro isolé, le développement de $\frac{1}{f(x, y)}$ contient des termes indépendants de $x - x_0$, que l'on peut ordonner par rapport aux puissances croissantes de $y - y_0$. Soit m le degré du premier de ces termes. Le théorème de Cauchy montre que l'équation (2) admet une et une seule intégrale égale à x_0 pour $y = y_0$, intégrale qui est holomorphe et développable sous la forme

$$x = x_0 + a_1(y - y_0)^{m+1} + a_2(y - y_0)^{m+2} + \ldots.$$

On en conclut que l'équation (1) admet une et une seule intégrale égale à y_0 pour $x = x_0$, et que cette intégrale est développable autour de x_0 par rapport aux puissances de $(x - x_0)^{\frac{1}{m+1}}$: le point x_0 est donc pour elle un *point critique algébrique* autour duquel se permutent $m + 1$ déterminations.

Nous dirons que l'intégrale y ainsi définie est *algébroïde* (¹) au voisinage de x_0. Nous signifions par là qu'autour de x_0 cette intégrale se comporte comme une fonction algébrique.

Prenons maintenant des conditions initiales x'_0, y'_0 voisines de x_0, y_0. Je dis que *l'intégrale $y = \varphi(x, y'_0, x'_0)$ qui est égale à y'_0 en x'_0 est une fonction algébroïde des trois variables x, y'_0, x'_0 pour x et x'_0 voisins de x_0, y'_0 voisin de y_0.*

Soit, en effet (²),

$$x = x'_0 + \psi(y, x'_0, y'_0)$$

(¹) On dit qu'une fonction est algébroïde dans une région R si elle est représentable, dans cette région, par une relation de la forme $\Pi(x, y) = 0$, Π étant un polynome en y et une fonction de x holomorphe dans la région R.

(²) *Cf.* les *Leçons de Stockholm* de M. Painlevé, p. 34-35.

l'intégrale de l'équation (2) définie par les conditions initiales x'_0, y'_0. D'après le corollaire de la page 9, ψ est une fonction holomorphe de y, x'_0, y'_0, lorsque $|y-y_0|$, $|x'_0-x_0|$, $|y'_0-y_0|$ sont inférieurs à un certain nombre λ. La fonction φ ne saurait donc présenter d'autres singularités que des singularités algébriques au voisinage des valeurs initiales x_0, y_0, x_0. Soit, d'autre part, q le nombre des zéros de $\psi(y, x_0, y_0)$ confondus en $y=y_0$. Décrivons dans le plan y autour de y_0 un cercle Γ, de rayon moindre que λ, tel que [1] (pour x_0, x'_0, y'_0 situés dans un certain domaine D autour de x, x_0, y_0) le module de la fonction de y, $\psi(y, x'_0, y'_0)-(x-x'_0)$ reste, sur le contour de Γ, supérieur à un nombre positif M. Lorsque x, x''_0, y'_0 varient dans le domaine D, les zéros de la fonction $\psi(y, x'_0, y'_0)-(x-x'_0)$ de y qui sont situés dans Γ se déplacent avec continuité; mais ils ne peuvent sortir de Γ puisque $\psi-(x-x'_0)$ ne s'annule pas sur le contour de Γ. Je dis que ces zéros sont, à l'intérieur de Γ, en nombre q exactement. En effet, leur nombre est égal à l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\frac{\partial\psi}{\partial y}dy}{\psi-(x-x'_0)}$. Or, cette intégrale, qui a une valeur entière, est égale à q pour $x=x'_0=x_0$, $y'_0=y_0$; d'autre part, elle est, sur le contour de Γ, une fonction continue de x, x'_0, y'_0 dans le domaine D. Elle reste donc égale à q dans tout ce domaine. En résumé, lorsque x, x'_0, y'_0 varient dans un certain domaine D autour de x, x_0, y_0, l'intégrale $y=\varphi(x, y_0, x_0)$ ne présente que des singularités algébriques et n'admet que q déterminations (intérieures à Γ) : c'est une fonction algébroïde.

Passons maintenant à l'examen des points singuliers qui n'appartiennent pas à la première catégorie définie plus haut, et répartissons-les à leur tour.

Deuxième catégorie. — Supposons que P *et* Q *soient holomorphes au voisinage de* x_0, y_0, *et que l'on ait*

$$P(x_0, y_0)\neq 0, \qquad Q(x_0, y_0)=0,$$

---

[1] Puisque y_0 est un zéro (multiple) isolé de $\psi-(x-x_0)$ il existe bien un cercle Γ répondant aux conditions voulues lorsque $x=x'_0=x_0$, $y'_0=y_0$; la continuité de ψ montre alors que ce cercle existe encore pour x, x'_0 voisins de x_0, y'_0 voisin de y_0.

cette dernière égalité étant identiquement satisfaite (au point x_0) *pour toute valeur de* y_0. En d'autres termes, soit x_0 *un pôle de* $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ *quel que soit* y.

Dans ces conditions, le coefficient différentiel de l'équation (2) ne contient pas de terme indépendant de $x - x_0$; l'intégrale holomorphe de (2) se réduit à $x = x_0$, et le raisonnement qui nous a servi tout à l'heure est inapplicable.

Des exemples simples montrent qu'un point x_0 de la deuxième catégorie peut être point singulier transcendant pour les intégrales de l'équation (1).

Ainsi l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda y}{x}$$

a pour intégrale générale $y = Cx^\lambda$. Or, si λ est un nombre complexe ou irrationnel, cette intégrale admet une infinité de déterminations qui se permutent autour de l'origine et diffèrent entre elles par des multiples de $e^{2i\pi\lambda}$.

Pareillement, l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a + y}{x^2}$$

admet l'intégrale générale

$$y + a = Ce^{-\frac{1}{x}},$$

pour laquelle l'origine est un point transcendant.

Troisième catégorie. — Supposons que l'on ait, pour une ou plusieurs valeurs isolées (¹) *de* y_0,

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0,$$

P *et* Q *étant holomorphes au voisinage de* x_0, y_0.

Le coefficient différentiel se présente alors, pour $x = x_0$, $y = y_0$,

(¹) Si ces valeurs n'étaient pas isolées, les égalités $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ devraient être identiquement vérifiées (au point x_0) quel que soit y_0. Chacun des polynomes P et Q admettrait alors comme facteur une certaine puissance de $(x - x_0)$, et, en éliminant le facteur commun à ces polynomes, on serait ramené à l'un des cas déjà étudiés.

sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. En ce cas encore, le point x_0 peut être point singulier transcendant pour les intégrales de l'équation (1). Ainsi nous verrons plus loin (Chap. III, p. 67) que l'origine est un point transcendant pour l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha y + \beta x}{y}.$$

Remarquons en passant que, si l'on se donne une équation (1) algébrique en x, on saura toujours déterminer algébriquement les points singuliers de la troisième catégorie que peuvent présenter ses intégrales : ce sont les racines x_0 du système d'équations simultanées $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$.

Quatrième catégorie. — Supposons maintenant que *l'une au moins des fonctions* P *et* Q *ne soit pas holomorphe au voisinage de* x_0, y_0. P et Q étant des polynomes en y, il faut, pour que cette circonstance se présente, que x_0 *soit point singulier d'un coefficient au moins des polynomes* P *et* Q.

Lorsque x_0 est un point critique algébrique pour les coefficients de P et Q, ces coefficients sont, au voisinage de $x = x_0$, des fonctions holomorphes d'une puissance fractionnaire de $x - x_0$. Le changement de variable $x - x_0 = t^m$, où m est un entier positif, nous ramène alors à l'un des cas précédemment examinés.

Lorsque x_0 est un point singulier transcendant des polynomes P, Q, il est clair que les intégrales de l'équation (1) admettent en général x_0 comme point transcendant.

Les points x_0 où, pour certaines valeurs (finies) de y_0, le théorème de Cauchy cesse d'être applicable appartiennent nécessairement à l'une des quatre catégories qui viennent d'être énumérées. Entre ces points il y a lieu de faire une distinction.

Nous remarquons que les points de la première catégorie (s'il en existe) sont des points arbitraires. En effet, s'il existe des points de la première catégorie, $Q(x_0, y_0)$ dépend, par définition, de y_0 et s'annule par suite, quel que soit x_0, pour une ou plusieurs valeurs de y_0. Il y a donc toujours une ou plusieurs intégrales de l'équation (1) qui admettent comme point de la première catégorie

un point x_0 quelconque. Pour exprimer ce fait, M. Painlevé dénomme les points singuliers de la première catégorie *points critiques mobiles* de l'équation (1). Ce sont toujours, nous l'avons vu, des points critiques algébriques.

Au contraire, les points singuliers de la deuxième, de la troisième et de la quatrième catégorie sont des points, en général ([1]), isolés, dont la situation ne dépend pas de la valeur choisie pour y_0, mais seulement des coefficients des polynomes en y, P et Q. On les appelle, pour cette raison, *points singuliers fixes* (*cf.* p. 6). Ce sont, en général, des points transcendants. Notons de plus que, si P et Q sont des fonctions algébriques de x, le nombre des points singuliers fixes est nécessairement fini.

Cinquième catégorie. — Nous avons supposé jusqu'ici que y_0 avait une valeur finie. Pour être complets ([2]), nous devons encore examiner *la ou les intégrales de l'équation* (1) *dont la valeur est infinie au point* x_0. Ces intégrales admettent-elles x_0 comme point singulier, et de quelle nature?

Faisons le changement de variable $y = \frac{1}{z}\cdot$ L'équation (1) se transforme en une équation de même forme

$$\frac{dz}{dx} = \frac{P_1(x, z)}{Q_1(x, z)}, \tag{3}$$

P_1 et Q_1 étant des polynomes par rapport à z. Sur l'équation (3) nous pourrons répéter la discussion faite tout à l'heure sur l'équation (1), les valeurs initiales à considérer étant $x = x_0$, $z = 0$.

L'intégrale z de (3) qui s'annule en x_0 peut être une fonction holomorphe de x au voisinage de x_0. Son inverse admet alors x_0 comme *pôle*. Les pôles sont, pour les intégrales de l'équation (1), des points singuliers mobiles.

L'intégrale z peut également être algébroïde au voisinage de x_0 :

([1]) Ces points sont isolés si les singularités des coefficients de P et Q sont elles-mêmes isolées.

([2]) Nous continuons à supposer que x_0 a une valeur finie. Si x_0 était infini, on transformerait l'équation en opérant le changement de variable $x = \frac{1}{\xi}\cdot$

son inverse y admet alors x_0 comme point critique algébrique (mobile) [1].

Enfin l'intégrale z, et par suite son inverse y, peuvent admettre x_0 comme point singulier transcendant (fixe).

Remarquons que les points singuliers des coefficients de P_1, Q_1 et les points qui sont des pôles de $\frac{P_1}{Q_1}$ quel que soit z, ne diffèrent pas des points singuliers de P, Q, et des points qui sont des pôles de $\frac{P}{Q}$ pour y quelconque. Comme points singuliers fixes des intégrales de (3) qui n'aient pas déjà été décelés par l'étude de l'équation (1), nous n'obtenons donc que les points (s'il en existe) où l'on a à la fois

$$P_1(x_0, 0) = 0, \qquad Q_1(x_0, 0) = 0.$$

Ces points constituent une *cinquième catégorie* de singularités pour les intégrales de l'équation (1).

Pour clore cette discussion, nous en dégagerons en ces termes la conclusion : Appelons ξ_1, ξ_2, ... les points singuliers fixes de l'équation (1). Ce sont les points des catégories deuxième, troisième, quatrième et cinquième, que nous déduisons directement des coefficients de P et Q. Si l'on considère un point quelconque x_0, distinct des points ξ, l'intégrale qui est égale à y_0 ou à l'infini pour $x = x_0$ est unique. Pour cette intégrale, x_0 est un point d'holomorphisme, un pôle ou un point critique algébrique.

II. — *Théorème de M. Painlevé.*

Dans le paragraphe précédent, je me suis placé au point de vue local des fondateurs de l'Analyse moderne : je me suis donné *a priori* des conditions initiales x_0, y_0, et j'ai considéré au voisinage

(1) Les corollaires des pages 9 et 10 s'étendent à ces deux cas : *l'intégrale $y = \varphi(x, y'_0, x'_0)$, qui est égale à y'_0 en x'_0, est une fonction méromorphe ou algébroïde des trois variables x, y'_0, x'_0 pour x et x'_0 voisins de x_0, y'_0 voisin de l'infini.*

de x_0 la ou les intégrales de l'équation (1) que définissent ces conditions. Je vais maintenant me poser, avec M. Painlevé, une question plus générale. Étant donnée une intégrale Y de l'équation (1), définie par la valeur C qu'elle prend en un certain point fixe X_0, que devient cette intégrale lorsque x décrit à partir de X_0 un chemin L quelconque?

Considérons un point x_0 du chemin L. Si x_0 coïncide avec l'un des points ([1]) singuliers fixes ξ_1, ξ_2, ... que nous avons définis plus haut, x_0 sera en général une singularité transcendante des intégrales de (1). Si x_0 ne coïncide pas avec un point ξ, nous devrons envisager les deux hypothèses suivantes :

1° Lorsque x tend vers x_0 sur le chemin L, Y tend vers une valeur déterminée y_0, finie ou infinie;

2° Lorsque x tend vers x_0 sur le chemin L, Y ne tend vers aucune limite.

Dans le premier cas, les théorèmes du paragraphe précédent nous apprendront que x_0 est pour l'intégrale Y un point d'holomorphisme, un pôle ou un point critique algébrique. Dans le second cas, ces théorèmes seront inapplicables.

Les analystes restés fidèles au point de vue de Cauchy avaient implicitement admis que le premier cas seul peut se présenter. C'était là, notons-le, un postulat gratuit ([2]) : car il n'y a *a priori* aucune raison de supposer que x_0 n'est pas point d'indétermination pour l'intégrale Y. M. Painlevé, le premier, tira la question au clair et il démontra que, si x_0 est distinct des points ξ, Y *tend nécessairement vers une valeur déterminée lorsque x tend vers x_0 sur le chemin* L.

Voici comment nous établirons cette proposition. Marquons dans le plan y les différentes racines $\overline{y}_1$, ..., $\overline{y}_\mu$ de l'équation

$$Q(x_0, y) = 0.$$

Puisque x_0 n'est pas point singulier pour Q et P, nous pouvons décrire autour des points $\overline{y}_1$, ..., $\overline{y}_\mu$ des contours d'ailleurs arbi-

---

([1]) Nous nous bornons au cas où les points (ξ) sont des points isolés.

([2]) De fait, ce postulat ne serait pas exact si l'équation différentielle étudiée était d'un ordre supérieur au premier.

trairement petits $\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$ tels que les racines y de l'équation

$$Q(x, y) = 0$$

soient intérieures à ces contours tant que $|x - x_0|$ est plus petit qu'un certain nombre ρ; de plus il existe un nombre fini H tel que l'on ait, pour y situé sur le contour d'une courbe γ (et pour $|x - x_0| < \rho$),

$$(4) \qquad \left|\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}\right| < H.$$

Traçons encore dans le plan Y un cercle Γ, de rayon très grand, ayant l'origine pour centre. On peut déterminer H de manière que l'inégalité (4) reste satisfaite (pour $|x - x_0| < \rho$) lorsque y est intérieur au cercle Γ et extérieur à tous les cercles γ.

Cela posé, admettons que Y, déterminé entre X et x_0 sur le chemin L, devienne indéterminé en x_0. Je dis que cette hypothèse conduit à une contradiction. En effet, si l'intégrale Y ne tend (quand x tend vers x_0) ni vers l'infini, ni vers une racine de $Q(x_0, y)$, il existe nécessairement sur L des points $\bar{x}$ arbitrairement rapprochés de x_0 où Y est extérieur aux γ, intérieur à Γ et satisfait par suite à l'inégalité (4). Or on sait qu'autour de tout point x où $\frac{P}{Q}$ et Y sont finis, Y est holomorphe et développable dans un cercle c de rayon fini. Lors donc que x passe par la série des valeurs $\bar{x}$ qui convergent vers x_0, le rayon du cercle c tend vers une limite non nulle : en sorte qu'à la limite x_0 est intérieur à c, ce qui prouve que Y est holomorphe au point x_0. Ce résultat étant contraire à l'hypothèse faite, cette dernière est à rejeter, et le théorème est démontré.

En nous appuyant sur le théorème de M. Painlevé, nous pourrons préciser en ces termes la conclusion du paragraphe précédent :

En dehors des points singuliers fixes (ξ), *une intégrale quelconque de l'équation* (1) *n'a pas d'autres singularités que des pôles ou des points critiques algébriques.*

Appliquons, par exemple, ce résultat à l'équation

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} + A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0,$$

où les A sont des polynomes en x. Soit x_0 un point quelconque : toute intégrale finie y est holomorphe; mais l'intégrale qui est infinie en x_0 admet ce point comme point critique autour duquel se permutent deux déterminations. Quelles sont, d'autre part, les singularités non algébriques de l'équation (5)? Ce ne peuvent être, d'après le théorème de M. Painlevé, que les points fixes appartenant aux diverses catégories énumérées au dernier paragraphe. Or, puisque le dénominateur du coefficient différentiel $\frac{P}{Q}$ se réduit ici à l'unité, il n'y a pas de points des catégories deuxième, troisième et quatrième. Reste à considérer les points singuliers des coefficients A (il n'y en a qu'un : *l'infini*) et les points obtenus en annulant le numérateur et le dénominateur de l'équation transformée

$$y = z^{-1}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{A_0 z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3}{z};$$

ces points sont les zéros du polynome A_3.

Le théorème de M. Painlevé permet de démontrer directement que la seule équation (1) dont les intégrales n'admettent pas de points critiques mobiles est l'équation de Riccati.

En effet, pour que les intégrales n'aient pas de points (critiques algébriques) de la première catégorie, il faut que $Q(x, y)$ soit indépendant de y. L'équation (1) doit donc être de la forme

$$\frac{dy}{dx} = P(x, y) \qquad (\text{P polynome en } y).$$

Faisons, d'autre part, $y = z^{-1}$. Afin que, dans l'équation transformée

$$\frac{dz}{dx} = -z^2 P\left(x, \frac{1}{z}\right),$$

le coefficient différentiel ne soit pas infini lorsque $z = 0$, il faut que le polynome P soit de degré 2 au plus par rapport à y. L'équation (1) se réduit alors à l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = A_0 + A_1 y + A_2 y^2. \tag{6}$$

Plus particulièrement, si l'on se proposait de déterminer toutes

les équations (1) dont les intégrales sont uniformes, la question reviendrait à trouver dans quels cas l'équation de Riccati (6) a pour intégrales des fonctions uniformes.

Cette question, dont la solution complète nous échappe encore, a été l'objet de nombreux travaux qui relèvent de la théorie des équations linéaires. On sait, en effet, que le changement de variable

$$\frac{z'}{z} = -A_2 y$$

transforme l'équation de Riccati (6) en une équation linéaire du second ordre

$$z'' = A_1 z' - A_0 A_2 z.$$

III. — *Intégrales à n branches.*

D'après le paragraphe précédent, toute équation (1) qui n'est pas une équation de Riccati a pour intégrale générale une fonction multiforme. Il y a lieu de se demander si cette fonction multiforme peut, dans certains cas, n'avoir qu'un nombre fini de branches. Plus précisément, nous allons rechercher avec M. Painlevé quelles sont les équations (1) algébriques en x dont les intégrales (exception faite peut-être pour un ensemble dénombrable d'*intégrales exceptionnelles*) n'acquièrent qu'un nombre donné n de branches lorsque x se meut d'une façon quelconque *sans traverser les points critiques fixes*.

Considérons une intégrale Y jouissant de cette propriété et prenant en un point fixe X_0 (non critique pour cette intégrale) une valeur initiale C; puis joignons X_0 à un point x par des chemins L quelconques *ne passant pas par les points* (ξ). Quel que soit le point x, l'intégrale Y est supposée y prendre n déterminations $y_1, y_2, \ldots, y_n$. D'ailleurs ces déterminations (pour un point x donné) varient avec C d'une manière continue; je vais montrer d'abord que *toute fonction symétrique* R *des n déterminations $y_1, \ldots, y_n$ est une fonction rationnelle de* C.

Partons de X_0 avec la valeur C et parcourons entre X_0 et x n chemins différents $L_1, \ldots, L_n$, de manière à arriver en x avec

les n déterminations différentes $y_1, \ldots, y_n$ [1]. Nous appellerons en particulier Y_j la branche de Y suivie le long de L_j; je dis qu'en tout point de L_j, Y_j est une fonction méromorphe ou algébroïde de C *pour toute valeur de* C. En effet, d'après les corollaires des pages 9, 10 et 15 (note), il en est bien ainsi pour les points de L_j voisins de X_0. D'autre part, il n'est pas possible que $Y_j(C)$ cesse d'être algébroïde à partir d'un point $\bar{x}$ du chemin L_j. Appelons, en effet, $\bar{C}$ la valeur de $Y_j(C)$ en $\bar{x}$; $\bar{C}$ est fonction méromorphe ou algébroïde de C; et, d'autre part, puisque $\bar{x}$ ne coïncide avec aucun des points (ξ), Y_j est fonction méromorphe ou algébroïde de $\bar{C}$ pour x voisin de $\bar{x}$; donc $Y_j(C)$ est encore algébroïde au voisinage de $\bar{x}$. On en conclut qu'à l'extrémité commune x des chemins L_j, les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ de C sont toutes méromorphes ou algébroïdes quel que soit C; donc la fonction symétrique $R(x, X_0, C)$, qui est fonction *uniforme* de C, est méromorphe en C pour toute valeur de C; c'est nécessairement une fonction *rationnelle* de C.

Ce point établi, nous pourrons toujours représenter les n déterminations $y_1, \ldots, y_n$ par une relation implicite

$$(7) \qquad y^n + R_{n-1}(x, X_0, C)y^{n-1} + \ldots + R_0(x, X_0, C) = 0,$$

les R étant des fonctions symétriques entières de $y, \ldots, y_n$, par suite des fonctions de x partout méromorphes (puisque uniformes) sauf peut-être aux points (ξ), et des fonctions rationnelles de C. D'ailleurs, pour des valeurs données de x, y, X_0, la relation (7) doit définir n valeurs de C (valeurs au point X_0 des n branches de l'intégrale Y). Les R sont donc, par rapport à C, de degré n au plus.

Nous supposerons que R_0 dépende de C. (Si cette condition

[1] Le raisonnement deviendrait inapplicable pour les valeurs de C, correspondant aux intégrales exceptionnelles définies plus haut, pour lesquelles on ne pourrait plus obtenir les n déterminations sans faire passer les chemins L par les points critiques fixes (ξ). On doit donc se demander si ces valeurs de C ne seront pas des singularités transcendantes de la fonction R. Mais la fonction R est uniforme dans tout le plan, et l'ensemble des valeurs exceptionnelles de C est, par hypothèse, dénombrable : ces valeurs devraient donc être pour R des points d'indétermination weierstrassiens, ce qui est manifestement impossible. *Voir*, à la fin du Volume, la Note de M. Painleve.

n'était pas remplie de prime abord, on la réaliserait en changeant y en $y +$ const.) Posons, dans ces conditions,

$$(8) \qquad R_0(x, X_0, C) = \lambda,$$

x étant un point d'un chemin L où les déterminations de y ne sont pas nulles, point que nous commencerons par supposer *fixe*. Au lieu de regarder les R comme fonctions de C, nous pouvons les considérer comme fonctions de λ. Je dis que l'*une quelconque*, R_j, *de ces fonctions est un polynome du premier degré par rapport à* λ.

En effet, R_j, fonction entière de $y_1, \ldots, y_n$, ne peut être infinie que si le produit $\lambda = R_0 = \pm y_1 y_2 \ldots y_n$ est lui-même infini.

D'autre part, à une valeur de λ correspond une intégrale unique de l'équation (1) (partant une seule détermination de R_j) : car la relation (8), de degré n en C, ne fait correspondre à une valeur de λ que n valeurs de C, qui sont les n déterminations de l'intégrale Y au point X_0.

Réciproquement, à une valeur de $R_j(x, X_0, C)$ en un point donné x il ne correspond qu'une valeur de λ; car, d'après la même remarque, à une détermination de R_j correspond une intégrale unique de l'équation (1), partant une seule fonction R_0.

R_j est donc bien, par rapport à λ, un polynome du premier degré.

De cette propriété des fonctions R on conclut que la relation (7), définissant les n branches de l'intégrale Y, peut s'écrire comme il suit :

$$(9) \quad y^n + [L_{n-1}(x, X_0) + \lambda M_{n-1}(x, X_0)] y^{n-1} + \ldots + [L_1 + \lambda M_1] y + \lambda = 0,$$

les L étant méromorphes en x pourvu que x soit distinct des points (ξ).

Nous avons supposé tout à l'heure que le point x était fixe. Donnons-lui maintenant une valeur variable en laissant X_0 invariable. Alors λ est une fonction de x et de x seulement; de même les L et les M. Dans ces conditions, la relation (9), supposée résolue par rapport à λ, prend la forme suivante :

$$(10) \qquad \lambda = -\frac{y^n + L_{n-1}(x) y^{n-1} + \ldots + L_1(x) y}{M_{n-1}(x) y^{n-1} + \ldots + M_1(x) y + 1}.$$

Supposons maintenant que l'on effectue sur l'équation (1) le changement de variable (10). L'équation deviendra

$$\frac{d\lambda}{dx} = \Phi(x, \lambda), \tag{11}$$

Φ étant par rapport à λ une fonction algébrique. Cette fonction algébrique est d'ailleurs rationnelle, puisque à un système de valeurs de x et de λ (ou R_0) correspond une seule détermination de $\frac{dR_0}{dx}$. Mais alors nous pouvons appliquer à l'équation (11) le premier théorème de M. Painlevé; étant donné que les intégrales de cette équation n'ont aucun point critique en dehors de certains points fixes (ξ), l'équation (11) est nécessairement une équation de Riccati

$$\frac{d\lambda}{dx} = G(x)\lambda^2 + H(x)\lambda + K(x). \tag{12}$$

D'où nous concluons, en définitive, que si les intégrales de l'équation (1) n'acquièrent que n branches autour des points critiques mobiles, l'équation (1) sera ramenée par le changement de variable (10) à l'équation de Riccati (12).

Je dis qu'*il n'existe qu'un seul changement de variables* (10) *ramenant l'équation* (1) *à la forme* (12). Supposons, en effet, qu'il existe une fonction λ' de x, différente de λ et jouissant des mêmes propriétés [c'est-à-dire ayant ses points critiques fixes et liée à y par une relation (10′) ou (9′) de même forme que (10) ou (9)] : en retranchant (9′) de (9) on trouvera que y est liée à x par une relation, de degré $n-1$ en y, dont les coefficients ont leurs points critiques fixes : les intégrales y n'auront donc que $(n-1)$ branches, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le changement de variable (10) n'étant possible que d'une manière, nous sommes assurés que nous pourrons toujours *obtenir par des opérations rationnelles les* L, *les* M, G, H *et* K *en fonction des coefficients de* (1) *et de leurs dérivées.*

Demandons-nous maintenant de quelle forme doit être une équation (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \qquad \text{(P et Q premiers entre eux)}$$

pour qu'un changement de variable

$$\lambda = \frac{p(x,y)}{q(x,y)} = \frac{-(y^n + \ldots + L_i y)}{M_{n-1}y^{n-1} + \ldots + 1} \qquad [(p \text{ et } q \text{ premiers entre eux } (^1)]$$

puisse la ramener à l'équation de Riccati (12). Je dis que P et Q *doivent être par rapport à y de degrés $2n$ et $2n - 2$ au plus.*

Il nous sera commode de remplacer l'intégrale générale λ de l'équation de Riccati (12) par son expression

$$\lambda = \frac{\alpha(x) + \beta(x)h}{\alpha_1(x) + \beta_1(x)h},$$

expression dans laquelle α, β, α_1, β_1 sont des fonctions à points critiques fixes et h la constante arbitraire. Nous aurons

$$h = \frac{\alpha_1 p - \alpha q}{\beta q - \beta_1 p} = \frac{p_1}{q_1},$$

p_1 et q_1 étant, comme p et q, des polynomes en y, premiers entre eux et de degré n; et notre équation différentielle s'écrira

$$\frac{dh}{dx} \equiv 0,$$

ou

$$(13) \qquad y' = \frac{p_1\left(\frac{\partial q_1}{\partial x} - q_1 \frac{\partial p_1}{dx}\right)}{q_1 \frac{\partial p_1}{\partial y} - p_1 \frac{\partial q_1}{\partial y}},$$

le numérateur et le dénominateur de (13) étant respectivement ([2]) de degré $2n$ et de degré $2n - 2$ en y.

Je dis que, si le numérateur et le dénominateur de (13) admettent un facteur commun $[y - \theta(x)]$, *la fonction $y = \theta(x)$ est une solution de l'équation* (1). En effet ([3]), si nous remplaçons y par $\theta(x)$ dans la dérivée

$$\frac{\partial \frac{p_1}{q_1}}{\partial x} = \frac{q_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} - p_1 \frac{\partial q_1}{dx} + y'\left(q_1 \frac{\partial p_1}{dy} - p_1 \frac{\partial q_1}{\partial y}\right)}{q_1^2},$$

([1]) Si p et q n'étaient pas premiers entre eux, les intégrales de l'équation (1) n'auraient pas n branches : elles en auraient moins.

([2]) On vérifiera sans peine que les premiers coefficients ne sont pas nuls.

([3]) On a toujours le droit de supposer que $y = \theta(x)$ n'annule pas q_1; s'il en était autrement, on changerait h en $\frac{1}{h}$.

nous constatons que cette dérivée est identiquement nulle. Donc $\frac{p_1}{q_1}$ est constant pour $y = \theta(x)$, et égal à une certaine valeur h_0 de la constante h, ce qui prouve que $y = \theta(x)$ est solution de l'équation proposée. D'ailleurs, $y = \theta(x)$ *est une solution multiple de* (1). En effet, la dérivée $\frac{\partial \frac{p_1}{q_1}}{\partial y}$ est identiquement nulle pour $y = \theta(x)$; donc $y = \theta(x)$ est une racine multiple de l'égalité $\frac{p_1}{q_1} = h_0$. Remarquons enfin que $y = \theta(x)$ est une *intégrale algébrique*. Reportons-nous, en effet, à l'expression de

$$\lambda = \frac{\alpha + \beta h}{\alpha_1 + \beta_1 h} = \frac{p(x, y)}{q(x, y)},$$

et faisons-y $h = h_0$, $y = \theta(x)$. Nous vérifierons sans peine que la dérivée $\frac{\partial \frac{p}{q}}{\partial y}$ est identiquement nulle. La solution $y = \theta(x)$ vérifie donc la relation $\frac{\partial \frac{p}{q}}{\partial y} = 0$, relation qui $\left(\text{comme } \frac{p}{q}\right)$ est algébrique en x.

En résumé, nous parvenons à la conclusion suivante : *Ou bien l'équation* (1) *admet une ou plusieurs* [1] *solutions particulières multiples et algébriques, ou bien le second membre de* (13) *est une fraction irréductible*. Dans ce dernier, pour calculer les L, les M, G, H et K en fonction des coefficients de (1), il suffit d'identifier les coefficients des numérateurs et des dénominateurs [2] des équations (1) et (13).

Ainsi se trouve démontré le second théorème de M. Painlevé que nous avions annoncé (p. 16). De ce théorème il résulte en particulier qu'en opérant tous les changements de variables de la forme (10') sur les équations de Riccati à intégrales uniformes, on obtiendra toutes les équations algébriques (1) dont les intégrales sont des fonctions multiformes à n branches. Toutes les équations (1) qui ne peuvent pas être obtenues de cette manière ont

---

(1) *Voir* la Note de M. Painlevé à la fin du Volume.

(2) On commencera par les dénominateurs.

pour intégrales des fonctions multiformes à une infinité de branches. Ce sera, en particulier, le cas pour l'équation

$$\frac{dy}{dx} = P(x, y), \tag{14}$$

lorsque P est un polynome en y de degré supérieur à 2.

IV. — *Remarques sur les fonctions multiformes.*

Nous venons de dire que, si nous nous assignons comme tâche l'étude des fonctions définies par l'équation différentielle (1), nous aurons en général affaire à des fonctions qui possèdent une infinité de branches. Cette constatation nous met dans un certain embarras. Il semble, en effet, que, jusqu'ici, les analystes aient systématiquement écarté les fonctions multiformes de leurs spéculations. S'ils ont fixé leur attention sur quelques-unes, c'est qu'ils savaient les rattacher à des transcendantes uniformes simples [1] (*exemple :* les recherches sur les fonctions abéliennes). Mais, pour ce qui est de la théorie générale des transcendantes multiformes, elle est à tel point inexistante que nous en ignorons jusqu'à l'objet; nous n'en sommes pas, en cette matière, à chercher des solutions, mais à nous demander quelles questions nous pourrions bien nous poser.

Livrés ainsi à leur propre inspiration, les géomètres qui voudraient explorer le monde des fonctions multiformes pourraient peut-être demander quelques suggestions à la théorie des fonctions uniformes. On sait par quel artifice les analystes se sont élevés des fonctions rationnelles aux transcendantes uniformes. Ayant affaire à des équations admettant, non plus un nombre fini, mais un ensemble infini de racines, ils ont cherché, en premier lieu, à déterminer les points-limites de cet ensemble; en second

---

[1] M. Poincaré a démontré que, quelle que soit la fonction multiforme y de x, on peut toujours exprimer x et y en fonction uniforme d'un même paramètre t. Mais nous ne sommes qu'incomplètement renseignés sur la nature des fonctions $x(t)$, $y(t)$, dont l'existence est ainsi établie. Ces fonctions sont étudiées par M. Poincaré dans un Mémoire qui vient de paraître : *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques* (*Acta mathematica,* t. XXXI).

lieu, ils ont étudié la répartition, la condensation des racines autour de leurs limites; d'autre part, ils ont examiné l'allure, le mode de croissance des fonctions uniformes au voisinage des points-limites de leurs zéros. On peut poser, relativement aux fonctions pourvues d'une infinité de branches, une série de questions analogues. Comme l'ensemble des zéros d'une fonction uniforme, on étudiera l'ensemble des points critiques d'une fonction multiforme et l'ensemble des déterminations de cette fonction pour une valeur quelconque de la variable. On recherchera, d'autre part, comment ces deux ensembles se correspondent l'un à l'autre, c'est-à-dire comment se combinent les permutations opérées autour des points critiques, de manière à donner naissance à l'ensemble des déterminations. On étudiera enfin la croissance des diverses branches de la fonction.

Toutes ces questions, nous les rencontrerons au cours de ces Leçons. Mais je veux faire, dès maintenant, quelques remarques générales sur les points-limites ([1]) des déterminations d'une fonction multiforme $y(x)$.

Considérons un ensemble $y_1(x), y_2(x), \ldots$ de branches de $y(x)$, holomorphes au voisinage d'un point $\overline{x}$ et convergeant, pour $x=\overline{x}$, vers un point $\overline{Y}_1$ du plan des y. Supposons, de plus ([2]), que les modules de ces branches soient bornés également au voisinage du point $\overline{x}$, c'est-à-dire restent inférieurs à un même nombre fixe quelque grand que soit l'indice i. Dans ces conditions, je vais démontrer la proposition suivante :

Pourvu que $\overline{x}$ ne soit pas point-limite de points singuliers ([3])

([1]) On trouvera une étude détaillée des fonctions engendrées par ces points dans la Thèse de M. P. Montel (*Sur les suites infinies de fonctions*) publiée depuis l'achèvement de ces Leçons. Les fonctions-limites de variables réelles avaient été depuis longtemps étudiées par M. Arzelà, ainsi que le rappelle M. Montel.

([2]) J'ai montré (*Rendic. del Circolo mat. di Palermo*, 1907) que cette supposition est impliquée dans l'hypothèse d'après laquelle $\overline{x}$ n'est pas limite de points singuliers ou d'intersections des y_i.

([3]) Tout point singulier transcendant doit être regardé comme point-limite de points singuliers algébriques. Mais la réciproque n'est pas vraie. En effet, nous considérons comme point-limite de points critiques tout point au voisinage duquel une infinité de branches y_i se permutent avec une infinité d'autres branches; cette définition ne suppose pas qu'une infinité de branches se permutent *entre elles* au voisinage du point considéré.

des branches $y_i(x)$ ou point-limite de leurs intersections, la limite Y_1 de ces branches est, au voisinage de $\bar{x}$, une fonction holomorphe de x. Les dérivées successives de Y_1 par rapport à x sont les limites des dérivées successives des branches $y_i(x)$.

Nous appellerons la limite Y_1 *branche-limite* ou *fonction-limite* des $y_i(x)$.

Soient $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots$ les valeurs de $y_1, y_2, \ldots$ pour $x = \bar{x}$; décrivons autour de $\bar{x}$ un cercle c tel que, pour i supérieur à un nombre m, les $y_i(x)$ ne présentent aucun point critique et aucun point d'intersection à l'intérieur de c. Considérons ensuite une courbe fermée γ entourant le point $\bar{x}$ et intérieure à c. Je dis qu'il existe sur cette courbe des arcs où la différence $y_{n+1} - y_n$ est arbitrairement petite $\left(\text{avec } \frac{1}{n}\right)$. En effet, par hypothèse, cette différence au point $\bar{x}$ sera inférieure à tel nombre ε que l'on voudra dès que n dépassera un certain nombre n_1. Supposons alors que l'on ait en tout point du contour γ, pour des valeurs indéfiniment croissantes de n,

$$(15) \qquad |y_{n+1} - y_n| > 2\varepsilon.$$

Puisque la différence $y_{n+1} - y_n$ devient inférieure à ε dans γ (pour $n > n_1$), l'inégalité (15) exige que cette différence s'annule à l'intérieur de c; or, elle ne peut s'annuler, car elle ne saurait le faire qu'en un point critique ou double des $y_n(x)$: donc $y_{n+1} - y_n$ tend bien vers zéro sur un arc au moins du contour γ.

Je vais conclure de là qu'*au point* $\bar{x}$ les différences des dérivées successives $y'_{n+1} - y'_n$, $y''_{n+1} - y''_n$, $\ldots$ tendent toutes vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Posons $y_{n+1} - y_n = f_n(x)$ et montrons que l'on aboutit à une contradiction si l'on suppose que $|f'_n(\bar{x})|$ reste, pour des valeurs de n indéfiniment croissantes, supérieur à un nombre fixe α indépendant de n. Nous savons que $f_n(x)$ est holomorphe et bornée dans le cercle c, en sorte que le développement

$$(16) \qquad f_n(\bar{x} + \eta) = f_n(\bar{x}) + f'_n(\bar{x})\eta + \ldots$$

est absolument convergent, quel que soit n, tant que $|\eta|$ reste

inférieur au rayon ρ de c. Désignons par A_p la plus grande valeur prise par le module $\left|\frac{f_n^{(p)}(\bar{x})}{p!}\right|$ lorsque n augmente indéfiniment. Nous sommes certains que la série $\Sigma A_p \eta^p$ converge absolument dans tout cercle de centre $\bar{x}$ *intérieur* à c : car, s'il en était autrement, les $f_n(x)$ tendraient (pour n croissant indéfiniment) vers une fonction qui présenterait un infini ou un point singulier à l'intérieur de c. Déterminons alors un nombre β (inférieur au rayon de c et indépendant de n), tel que l'on ait, pour n assez grand et pour $|\eta| < \beta$,

$$\left|\frac{f''_n(\bar{x})}{2}\eta + \frac{f'''_n(\bar{x})}{2.3}\eta^2 + \ldots + \right| < |A_2\eta + A_3\eta^2 + \ldots + | < \frac{\alpha}{2};$$

puis prenons pour courbe γ un cercle de centre $\bar{x}$ et de rayon β' moindre que β. Comme $f_n(\bar{x})$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, on voit que si $|f'_n(\bar{x})|$ restait supérieur à α, $f_n(\bar{x} + \eta)$ serait, sur le contour de γ, supérieur à $\frac{\alpha\beta'}{2}$, et ne pourrait, par suite, tendre vers zéro en aucun point de ce contour : ce qui est contraire au résultat obtenu tout à l'heure. Nous sommes donc assurés que $|f'_n(\bar{x})|$ est inférieur à α à partir d'une certaine valeur de n et décroît indéfiniment avec $\frac{1}{n}$. De proche en proche, on démontrerait qu'il en est de même des dérivées successives $f''_n(\bar{x})$, $f'''_n(\bar{x})$, ...

Ainsi, dans le développement (16) tous les coefficients tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Il en résulte que f_n ou $y_{n+1} - y_n$ tend vers zéro en tout point où ce développement converge, c'est-à-dire *en tout point intérieur à c*. Il en est de même des dérivées $y'_{n+1} - y'_n$, $y''_{n+1} - y''_n$, ...

Cela dit, appelons Y_1, Y'_1, Y''_1, ... l'ensemble des valeurs-limites des $y_i(x)$, $y'_i(x)$, $y''_i(x)$, ... en un point quelconque du cercle c. Il résulte de ce qui précède : 1° que l'ensemble Y_1, se réduisant à un point pour $x = \bar{x}$, se réduit encore à un point pour toute valeur de x intérieure à c; de même les ensembles Y'_1, Y''_1, ...; 2° que les différences $Y_1 - y_n$, $Y'_1 - y'_n$, $Y''_1 - y''_n$, ... tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. En particulier, si l'on appelle ξ et ζ, η_n et θ_n, H_1

et K_1 les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans x, y_n et Y_1, on aura

$$\frac{\partial H_1}{\partial \xi} = \lim_{n=\infty} \frac{\partial \eta_n}{\partial \xi}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial K_1}{\partial \zeta} = \lim_{n=\infty} \frac{\partial \theta_n}{\partial \zeta}.$$

On en conclut que Y_1 est, comme y_n, une fonction analytique holomorphe au voisinage de $x = \bar{x}$; il en est de même de Y'_1, Y''_1, ... et ces fonctions sont, de plus, les dérivées successives de la fonction Y_1 : ce qu'il fallait démontrer.

Nous avons défini la branche-limite Y_1 au voisinage du point $\bar{x}$. Que deviendrait-elle si, nous éloignant de $\bar{x}$, nous faisions varier x d'une façon arbitraire?

Il est clair que, si x vient à coïncider avec un point-limite de points singuliers de branches $y_i(x)$, la branche-limite $Y_1(x)$ pourra présenter en ce point une singularité [1]. Or, dans le cas le plus général, les points singuliers de $y_i(x)$ auront une infinité de points-limites : dès lors, quand x variera d'une manière quelconque, Y_1 pourra engendrer une fonction multiforme $Y(x)$, aussi compliquée que la fonction $y(x)$ d'où nous sommes partis. Parfois, au contraire, la fonction-limite $Y(x)$ sera plus simple que $y(x)$, et c'est en ce cas qu'elle nous intéressera.

De l'existence même de la fonction-limite $Y(x)$ on déduira la proposition suivante :

Si une fonction multiforme y satisfait à une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{17}$$

où f est analytique en x et y, la fonction-limite Y satisfait à la même équation.

En effet, pour toute branche Y_1 de Y, limite d'un ensemble de branches $y_1, \ldots, y_n$ de y, on a les égalités

$$\frac{dY_1}{dx} = \lim_{n=\infty} \frac{dy_n}{dx}, \qquad \lim f(x, Y_1) = \lim_{n=\infty} f(x, y_n).$$

---

[1] La démonstration donnée ci-dessus cesse d'être valable lorsque $\bar{x}$ est point-limite de points singuliers ou d'intersections des $y_i(x)$. Mais on peut montrer que, sous certaines conditions, les points-limites d'intersections des y_i ne sont pas points singuliers pour $Y_1(x)$ (*voir* le Mémoire cité plus haut p. 26, note 2).

Nous connaîtrons ainsi une condition nécessaire pour qu'en un point donné les déterminations d'une intégrale $y(x)$ de l'équation (17) admettent une valeur-limite unique ou un nombre fini de valeurs-limites : il faudra que *l'équation* (17) *ait une intégrale uniforme ou une intégrale ne possédant qu'un nombre fini de branches* [1]. En particulier, pour que les déterminations de $y(x)$ n'aient d'autre valeur-limite que l'infini (comme il arrive pour les déterminations de la fonction inverse d'une fonction entière), il faut que l'équation différentielle

$$z = \frac{1}{y}, \qquad \frac{dz}{dx} = -z^2 \frac{P\left(x, \frac{1}{z}\right)}{Q\left(x, \frac{1}{z}\right)}$$

admette l'intégrale particulière $z = 0$.

A ces observations générales j'ajouterai une remarque d'un autre ordre.

On sait comment les analystes ont pu rendre uniformes les fonctions algébriques en les représentant sur des surfaces de Riemann composées de feuillets superposés. Il ne sera pas difficile d'appliquer aux fonctions pourvues d'une infinité de branches le même mode de représentation.

Appelons, en effet, $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots$ les diverses déterminations d'une fonction multiforme en un point $\overline{x}$. On peut, d'une infinité de manières (en joignant entre eux ou à l'infini les points critiques de y), tracer dans le plan des x un système de coupures tel que la fonction y ne prenne en chaque point qu'une valeur, lorsque x se meut sans franchir les coupures. Les coupures d_1, d_2, ... seront par exemple des fentes, découpées dans un feuillet plan $\mathcal{F}_1$ et infranchissables pour la variable x : au point $\overline{x}$ du feuillet $\mathcal{F}_1$, y prendra la valeur unique $\overline{y}_1$.

Si nous voulons maintenant permuter $\overline{y}_1$ avec $\overline{y}_2$, nous devrons faire varier x le long d'un [2] lacet fermé L, entourant certains points critiques x_1, x_2, ... Aplatissons ce lacet de manière

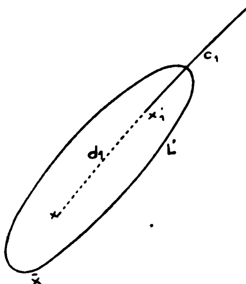
---

[1] Nous établirons directement l'existence d'une telle intégrale dans les exemples étudiés au Chapitre IV.

[2] Il peut arriver que les déterminations $\overline{y}_1$ et $\overline{y}_2$ s'échangent entre elles le long de plusieurs lacets L, L', L'', ... entourant des groupes différents de points

à rendre infiniment petite l'aire comprise à l'intérieur de sa boucle (sans en faire sortir toutefois les points x_1, x_2, ...). Le lacet L tendra vers une ligne sans épaisseur, l, issue de $\bar{x}$ et parcourue deux fois. Soit x_1 le premier point critique rencontré sur cette ligne, x'_1 le dernier. Je prendrai pour coupure d_1 le segment de l compris entre x_1 et x'_1; puis, à partir de x'_1 je prolongerai l jusqu'à l'infini (ce prolongement ne passant par aucun point critique) et j'appellerai c_1 le segment $x'_1\infty$. Si, à partir de $\bar{x}$, on dé-

Fig. 1.



crit un lacet L′ qui coupe *une fois* la ligne c_1 et ne rencontre aucune coupure, ce lacet permutera les déterminations $\bar{y}_1$ et $\bar{y}_2$. Cela dit, considérons un feuillet plan $\mathfrak{F}_2$ superposé à $\mathfrak{F}_1$. Dans ce feuillet découpons des fentes suivant les coupures d_1, d_2, ...; puis relions $\mathfrak{F}_2$ à $\mathfrak{F}_1$ par une ligne de croisement ([1]) placée suivant c_1. La fonction y sera uniforme sur l'ensemble des deux feuillets $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Au point $\bar{x}$ du feuillet $\mathfrak{F}_2$, elle prendra la valeur $\bar{y}_2$.

En continuant de la sorte, on obtiendra une surface de Riemann formée d'une série de feuillets $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, ... sur lesquels $y(\bar{x})$ prendra les valeurs $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$, ...

---

critiques. On pourra raisonner sur ces divers lacets comme nous raisonnons sur L, et faire correspondre à chacun d'eux une ligne c suivant laquelle on mènera une ligne de croisement reliant les feuillets $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$. Ces deux feuillets seront alors joints par plusieurs lignes de croisement au lieu d'une seule.

([1]) On sait ce qu'il faut entendre par là. Considérons deux fentes superposées c'_1, c''_1 découpées respectivement dans les feuillets $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ suivant la ligne c_1. Pour joindre $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$, on relie par une première nappe le bord droit de la fente c'_1 au bord gauche de la fente c''_1, et par une seconde nappe le bord gauche de la fente c' au bord droit de la fente c''_1.

Or, MM. Poincaré et Volterra ont démontré [1] que l'ensemble des déterminations $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots$ que peut prendre en un point $\overline{x}$ une fonction multiforme est un ensemble dénombrable. Il en résulte qu'en définissant la suite des branches $y_1, y_2, \ldots$ sur la série correspondante des feuillets $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ... on épuise toutes les déterminations de la fonction.

Ainsi, il est toujours possible de construire des surfaces de Riemann sur lesquelles une fonction multiforme donnée peut être regardée comme uniforme. Il existe même une infinité de telles surfaces. Mais, notons-le, la définition que nous en obtenons est purement théorique. Nous ne pouvons prévoir comment seront agencés, dans chaque cas particulier, les feuillets de la surface et les lignes de croisement qui les rattachent. Ce sera précisément l'un des problèmes que nous nous poserons, lorsque nous serons en présence d'un type nouveau de fonctions multiformes, que de chercher à les représenter sur une surface de Riemann aussi simple que possible et appropriée à leur nature (*comparer* Chap. III).

V. — *Appel à la notion de continuité.*

Pour clore ces préliminaires, je dirai quelques mots d'une méthode générale d'investigation qui me sera utile en mainte occasion.

C'est un fait digne de remarque que, dans les différents ordres de sciences, l'esprit humain suit une marche semblable : il part des faits connus, puis, par continuité, cherche à s'élever de ces faits à d'autres faits, voisins mais plus complexes. Ce fécond procédé de découverte, la théorie des équations différentielles ne l'a pas négligé : elle en a condensé la vertu en trois ou quatre théorèmes sur lesquels nous allons porter notre attention.

Supposons en premier lieu qu'une équation (1) (page 8) ait une intégrale particulière, $y(x, C_0)$, exceptionnellement simple (cette intégrale est définie par la valeur initiale C_0 qu'elle prend

(1) *Voir* les *Leçons sur la théorie des fonctions* de M. Borel, Chapitre IV, et le Mémoire de M. Poincaré cité plus haut, p. 25, en note.

en un point fixe X_0). Ne va-t-on pas pouvoir tirer parti des propriétés de $y(x, C_0)$ pour étudier les intégrales voisines, c'est-à-dire les intégrales qui prennent en X_0 des valeurs C voisines de C_0? Le problème revient à chercher comment varie en fonction de C l'intégrale $y(x, C)$ (définie par la valeur initiale C), si on la suit le long d'un chemin déterminé. Or, c'est là une question que, dans des cas particuliers, nous nous sommes déjà posée (corollaires des pages 9, 10 et 15, note). Le théorème suivant (¹) y répondra :

Soit L *un chemin quelconque issu de* X_0, *ne passant par aucun des points singuliers fixes* (ξ), *et dont aucun point, sauf peut-être le dernier,* $\bar{x}$, *n'est point critique de* $y(x, C_0)$ (²). *Suivons sur* L, *à partir de la valeur initiale* C, *l'intégrale* $y(x, C)$ *et arrêtons-nous au point* $\bar{x}$:

1° *Si la fonction* $y(x, C_0)$ *de* x *est, pour* x *voisin de* $\bar{x}$, *une fonction holomorphe, méromorphe ou algébroïde, la fonction* $y(x, C)$ *de* x *et* C *est pareillement, pour* x *et* C *respectivement voisins de* $\bar{x}$ *et* C_0, *une fonction holomorphe, méromorphe ou algébroïde.*

2° *Si* q *déterminations de* $y(x, C_0)$ *se permutent autour de* $\bar{x}$ (*qui est alors point critique isolé*), *un nombre égal* (q) *de déterminations de la fonction de* x, $y(x, C)$ *se permuteront auprès du point* $\bar{x}$ *pour* C *voisin de* C_0.

Pour démontrer la première partie de ce théorème, on procédera comme à la page 20. On sait que la proposition énoncée est vraie pour $\bar{x}$ voisin de X_0. D'autre part, il n'est pas possible qu'elle cesse d'être vraie à partir d'un point x' du chemin L; car soient C'_0, C' les valeurs de $y(x', C_0)$ et $y(x', C)$: pour $\bar{x}$ et C voisins de x' et C_0, y sera fonction holomorphe, méromorphe ou algébroïde de C',

(¹) *Cf.* les *Leçons de Stockholm* de M. Painlevé.

(²) Si un point de L autre que le dernier était critique pour $y(x, C_0)$, cette intégrale aurait en $\bar{x}$ deux valeurs distinctes, dont chacune engendrerait une fonction holomorphe, méromorphe ou algébroïde de x et C, lorsque x et C varieraient au voisinage de $\bar{x}$ et C_0. D'ailleurs il serait toujours possible de déformer légèrement le chemin L de manière à n'obtenir en $\bar{x}$ qu'une détermination de $y(x, C_0)$.

cependant que C′ sera fonction holomorphe ou méromorphe de C; donc la proposition est vraie sur tout le chemin L.

La seconde partie du théorème est une conséquence du corollaire de la page 10. Appelons $\overline{y}_C$ la valeur de $y(x, C)$ au point $\overline{x}$ et supposons que pour $x = \overline{x}$, $y(x, C_0)$ ait q déterminations confondues en $\overline{y}_{C_0}$. Le résultat que nous avons obtenu page 11 peut être interprété comme il suit : lorsque les variables x, y'_0, x'_0 sont situées dans un certain domaine D au voisinage des valeurs $\overline{x}$, $\overline{y}_{C_0}$, $\overline{x}$, la branche d'intégrale $y(x, C) = \varphi(x, y'_0, x'_0)$ qui est égale à y'_0 en x'_0 admet q déterminations, et q seulement, voisines de $\overline{y}_{C_0}$. Considérons ces q déterminations pour une valeur fixe de C voisine de C_0 : je dis qu'elles se permutent entre elles au voisinage du point $\overline{x}$. Pour le vérifier, entourons $\overline{x}$ d'un petit cercle γ (intérieur au domaine D) sur lequel nous prendrons un point $\overline{x'}$. La branche d'intégrale $y(x, C_0)$ a, en $\overline{x'}$, q valeurs différentes $\overline{y'}_{C_{0,1}}, \ldots, \overline{y'}_{C_{0,q}}$ qui se permutent entre elles lorsque x décrit une fois, deux fois, ..., q fois le contour γ. D'ailleurs la première partie de notre théorème est applicable le long de γ. Si donc l'intégrale $y(x, C)$ a en $\overline{x'}$ une première valeur $\overline{y'}_{C_1}$ suffisamment voisine de $\overline{y'}_{C_{0,1}}$, elle acquerra au même point (lorsque x décrira le contour γ) $q - 1$ autres valeurs respectivement voisines de $\overline{y'}_{C_{0,2}}, \ldots, \overline{y'}_{C_{0,q}}$. En d'autres termes, $y(x, C)$ admet, en $\overline{x'}$, q déterminations se permutant entre elles autour de points critiques qui tendent tous vers $\overline{x}$ lorsque C tend vers C_0.

Il sera souvent commode de réserver le nom de *point critique simple* aux points critiques algébriques autour desquels se permutent seulement deux déterminations d'une fonction : lorsque q déterminations s'échangent autour de x, on admettra qu'il y a $q - 1$ points critiques confondus en $\overline{x}$. Si l'on adopte ce langage, on peut dire qu'à tout point critique x_1 de $y(x, C_0)$ correspond un point critique x'_1, de $y(x, C)$, voisin de x_1 pour C voisin de C_0. Ainsi se manifeste entre les allures des deux intégrales une étroite ressemblance, dont on profitera pour étudier les propriétés de $y(x, C)$.

La comparaison de deux intégrales voisines sera surtout instructive lorsque l'une des deux intégrales sera une fonction connue.

Mais c'est là, ne l'oublions pas, un cas exceptionnel. Aussi allons-nous, pour tirer du raisonnement par continuité tout le parti qu'il comporte, recourir à un artifice.

Introduisons dans l'équation (1) un paramètre variable μ. Nous formerons une nouvelle équation différentielle

$$(18) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu),$$

qui coïncidera avec l'équation (1) pour une valeur particulière de μ (par exemple $\mu = 1$), mais qui, pour d'autres valeurs de μ (par exemple $\mu = 0$), pourra être plus simple que l'équation (1). Si nous savons alors suivre la variation des intégrales de (18) lorsque μ varie avec continuité de 0 à 1, nous pourrons déduire des propriétés de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, 0)$$

certaines propriétés correspondantes de l'équation (1). L'application de cette méthode présentera quelquefois des difficultés; cependant nous parviendrons souvent à la mener à bout, en nous appuyant sur les théorèmes suivants [1] :

I. *Soit le second membre de l'équation différentielle*

$$(19) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu)$$

holomorphe pour $|x - x_0| < r$, $|y - y_0| < \rho$, $|\mu - \mu_0| < \tau$. *L'intégrale* y_μ *de* (18) *qui prend en* x_0 *la valeur initiale* y_0 *est une fonction holomorphe de* x *et* μ *pour* x *et* μ *respectivement voisins de* x_0 *et* μ_0.

En effet, soit M la plus grande valeur du module de f dans le domaine $|x - x_0| < r$, $|y - y_0| < \rho$, $|\mu - \mu_0| < \tau$. D'après le théorème de Cauchy (page 18), l'intégrale y_μ que définissent les conditions initiales x_0, y_0 est développable par rapport aux puissances de $x - x_0$ dans un cercle de rayon au moins égal à

[1] *Voir* Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, p. 48 et 599; Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, Chap. VIII.

$r\left(1 - e^{-\frac{\rho}{2Mr}}\right)$; d'ailleurs les coefficients du développement (fonctions rationnelles des coefficients de f) sont toutes fonctions holomorphes de μ dans un domaine *fini non nul* entourant $\mu = \mu_0$. On en conclut que l'intégrale y_μ est, elle aussi, fonction holomorphe de μ. (*Cf.* p. 9, note 2.)

II. *Les hypothèses de l'énoncé précédent étant supposées satisfaites, soit y'_0 une fonction holomorphe de μ qui se réduit à y_0 pour $\mu = \mu_0$. L'intégrale y_μ de* (18) *qui prend en x_0 la valeur initiale y'_0 est une fonction holomorphe de x et μ pour x et μ respectivement voisins de x_0 et μ_0.* Nous savons, en effet, que y_μ est fonction holomorphe de x, de y'_0 et de μ.

Du cas où le coefficient différentiel f est holomorphe on passera au cas où il est méromorphe en retournant l'équation (18) et la mettant sous la forme

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y, \mu)}.$$

Puis, faisant le changement de variable $y = z^{-1}$, on examinera le cas où la valeur initiale y_0 est infinie. Enfin on étudiera l'intégrale y_μ, non plus seulement au voisinage d'un point x_0, mais le long d'un chemin quelconque L défini comme à la page 33. Je me contente d'énoncer les résultats auxquels on sera conduit [les démonstrations sont identiques à celles qui ont été données aux pages 10, 15 (note) et 33] :

III. *Supposons que $f(x, y, \mu)$ admette un pôle pour $x = x_0$, $y = y_0$, $\mu = \mu_0$, et soit holomorphe partout ailleurs dans le domaine $|x - x_0| < r$, $|y - y_0| < \rho$, $|\mu - \mu_0| < \tau$. La branche d'intégrale y_μ* de (18) *qui prend en x_0 la valeur initiale y_0 est une fonction algébroïde de x et μ pour x et μ respectivement voisins de x_0 et μ_0.* Il en est de même de la *branche d'intégrale qui prend en x_0 une valeur y'_0, fonction holomorphe de μ et se réduisant à y_0 pour $\mu = \mu_0$.* Soit, d'autre part, q le nombre des déterminations de y_{μ_0} qui sont confondues en y_0 pour $x = x_0$. Lorsque les variables x et μ sont situées dans un certain domaine au voisinage des valeurs x_0, μ_0, *la branche d'intégrale y_μ admet q déterminations, et q seulement, voisines de y_0.*

IV. Ces divers résultats sont applicables à l'équation

$$z = \frac{1}{y}, \qquad \frac{dz}{dx} = -z^2 f\left(x, \frac{1}{z}, \mu\right)$$

pour x, z, μ respectivement voisins de x_0, o, μ_0.

V. Soit L un chemin quelconque issu de x_0, ne passant par aucun des points singuliers fixes (ξ), et dont aucun point, sauf peut-être le dernier, $\bar{x}$, n'est point critique de $y(x, C_0)$. Suivons sur L, à partir de la valeur initiale C, l'intégrale $y_\mu(x, C)$:

1° *Si la fonction de x, $y_{\mu_0}(x, C)$, est, pour x voisin de $\bar{x}$, une fonction holomorphe, méromorphe ou algébroïde, la fonction de x, μ et C, $y_\mu(x, C)$, est pareillement, pour x, μ et C respectivement voisins de $\bar{x}$, μ_0 et C_0, une fonction holomorphe, méromorphe ou algébroïde.*

2° *Si q déterminations de $y_{\mu_0}(x, C_0)$ se permutent autour du point $\bar{x}$, un nombre égal, q, de déterminations de la fonction de x, $y_\mu(x, C)$, se permuteront au voisinage du point $\bar{x}$, pour μ et C respectivement voisins de μ_0 et C_0.*

Tels sont les théorèmes fondamentaux qui permettent de comparer entre elles les intégrales de l'équation (18) pour deux valeurs voisines du paramètre μ. Faisons en particulier $\mu_0 = 0$ et considérons l'intégrale $y_\mu(x, C)$ le long d'un chemin L où $y_0(x, C)$ est holomorphe. D'après ce qui précède, on peut, le long de ce chemin, développer y_μ par rapport aux puissances entières de μ. Les coefficients du développement seront des fonctions de x qu'il sera facile de déterminer. Posons, en effet,

$$y = \varphi_0 + \varphi_1 \mu + \varphi_2 \mu^2 + \ldots$$

et substituons cette série à y dans les deux membres de l'équation (19). Développant le second membre par rapport aux puissances de μ, nous aurons

$$\varphi'_0 + \varphi'_1 \mu + \ldots = f(x, \varphi_0, 0) + \left[\frac{\partial f(x, \varphi_0, 0)}{\partial y}\varphi_1 + \frac{\partial f(x, y_0, 0)}{\partial \mu}\right]\mu + \ldots.$$

Cette égalité doit être satisfaite quel que soit μ : donc les coeffi-

cients des puissances semblables de μ sont égaux dans les deux membres, et l'on a

$$\frac{d\varphi_0}{dx} = f(x, \varphi_0, 0),$$

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{\partial f(x, \varphi_0, 0)}{\partial y}\varphi_1 + \frac{\partial f(x, \varphi_0, 0)}{\partial \mu}, \qquad \dots$$

On pourra ainsi calculer de proche en proche les coefficients $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, chacun d'eux étant défini (lorsque les précédents sont connus) par une équation différentielle linéaire.



CHAPITRE II.

CROISSANCE ET ALLURE D'UNE BRANCHE D'INTÉGRALE.

Considérons un point singulier transcendant au voisinage duquel s'échangent une infinité de branches d'une même intégrale. Pour étudier ce point singulier, il y aura lieu de traiter deux problèmes distincts : 1° étude d'une branche d'intégrale *isolée* au voisinage du point singulier ; 2° étude du mécanisme au moyen duquel cette branche s'échange avec les autres.

C'est du premier de ces deux problèmes que je vais m'occuper dans ce Chapitre. Je me bornerai d'ailleurs à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{P}(x, y)}{\mathfrak{Q}(x, y)}, \tag{1}$$

où $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ sont des polynomes par rapport à y et *par rapport à* x, et je supposerai le point singulier transcendant renvoyé à l'infini. Je chercherai donc à étudier l'allure des branches d'intégrales [1] de l'équation (1) lorsque le module de x augmente indéfiniment [2].

I. — *Branches d'intégrales à croissance exponentielle.*

Soient p et q les degrés des polynomes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ par rapport à y.

---

(1) D'une manière générale, j'entends par branche d'intégrale : au sens large, une intégrale suivie le long d'un *chemin direct* (*voir* p. 45) ; au sens restreint, une intégrale suivie le long d'un *chemin rectiligne* (en ce cas je désignerai la branche d'intégrale par l'expression : *ensemble des caractéristiques issues d'un point donné avec une valeur initiale donnée,* voir p. 58).

(2) C'est M. Borel qui s'est, le premier, systématiquement préoccupé d'étudier la croissance des fonctions définies par les équations différentielles [*Mémoire sur les séries divergentes* (*Ann. sc. de l'Éc. Norm. sup.*, 1899)]. — *Cf.* LINDELÖF, *Bull. de la Soc. math. de France*, 1899.

Je distinguerai deux cas suivant que $p - q$ est égal à 1 ou différent de 1, et j'examinerai d'abord le premier cas.

Lorsque $p - q = 1$, l'équation proposée est de la forme

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx}(a_1 + a_2 y + \ldots + a_p y^{p-1}) = b_0 + \ldots + b_p y^p,$$

les a et b étant des polynomes en x. Pour étudier cette équation, il convient encore de distinguer deux cas, suivant que le degré de b_p est supérieur ou égal, ou bien inférieur au degré de a_p. Je supposerai ici la différence μ des degrés de b_p et a_p positive ou nulle, et je montrerai qu'en ce cas il y a entre la croissance des intégrales de l'équation (2) et la croissance des fonctions entières une remarquable analogie. D'ailleurs, les intégrales de (2) jouissent d'une propriété qui nous incite naturellement à les rapprocher des fonctions entières : ces intégrales ne présentent aucun infini à distance finie. En effet, si l'on pose $y = z^{-1}$, on transforme l'équation (2) en

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-z(b_0 z^p + \ldots + b_p)}{a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p},$$

et la nouvelle équation n'admet d'autre intégrale nulle à distance finie que l'intégrale constante $z = y^{-1} = 0$.

Pour étudier les intégrales de (2), nous poserons $y = uv$ et

$$u = e^{\int_0^x \frac{b_p}{a_p} dx}.$$

Plaçons-nous à l'extérieur d'un cercle contenant les zéros de a_p et b_p, et faisons varier x sur un rayon issu de l'origine. Nous pouvons écrire $\frac{b_p}{a_p} = C + \frac{\beta}{\alpha}$, C étant un polynome de degré μ et $\frac{\beta}{\alpha}$ une fraction rationnelle de degré négatif ou nul. On voit alors que lorsque le module $|x|$ augmente indéfiniment le terme en x^μ est prépondérant dans $\frac{b_p}{a_p}$; pareillement [1] le terme en $x^{\mu+1}$ est prépondérant dans $\int_0^x \frac{b_p}{a_p} dx$. Soit $gx^{\mu+1}$ ce terme : quelque petit

[1] Pour le vérifier en toute rigueur, il suffit de se reporter à l'expression générale de l'intégrale de la fraction rationnelle $\frac{b_p}{a_p}$.

que soit ε, on aura à partir d'une certaine valeur r de x l'inégalité

$$\left| \frac{\log u}{g x^{\mu+1}} - 1 \right| < \varepsilon.$$

On conclut de là que, dans $\mu + 1$ angles ayant pour sommet l'origine et pour amplitude $\frac{(1-\alpha)\pi}{\mu+1}$ (α étant un nombre arbitrairement petit), le module de u augmente indéfiniment avec $|x|$, tandis que dans $\mu + 1$ angles alternant avec les précédents ce module décroît indéfiniment. Plaçons-nous dans l'un des $\mu + 1$ premiers angles, et supposons que x s'éloigne indéfiniment sur un rayon R. On peut trouver un nombre positif k tel que l'on ait, sur R, à partir d'une certaine valeur r' de $|x|$,

$$(3) \qquad |u| > e^{k|x|^{\mu+1}}.$$

Cela dit, revenons à l'équation (2). Nous avons posé $y = uv$. Tenant compte de la valeur de $\frac{u'}{u}$, nous écrirons

$$v' = \frac{b_0 + \ldots + b_{p-1} u^{p-1} v^{p-1} - u'(a_1 v + \ldots + a_{p-1} u^{p-2} v^{p-1})}{a_1 u + \ldots + a_p u^p v^{p-1}}.$$

Nous allons chercher une limite supérieure du module $|v'|$ sur le rayon R.

Désignons par σ un nombre supérieur aux degrés de tous les polynomes a et b, et supposons provisoirement que l'on ait à partir d'une certaine valeur de $|x|$

$$(4) \qquad |uv| > |x|^{\sigma}.$$

Dans ces conditions, lorsque $|x|$ deviendra très grand, tous les termes du dénominateur de v' s'effaceront devant le dernier. D'ailleurs $|a_p|$ reste supérieur à un nombre fini non nul. On pourra donc trouver un nombre positif h tel que l'on ait à partir d'une certaine valeur r'' de $|x|$ l'inégalité

$$(5) \qquad \text{Module du dénominateur de } v' > h\,|u^p v^{p-1}|.$$

D'autre part, quand $|x|$ est très grand, on a

$$\left| \frac{u'}{u} \right| = \left| \frac{b_p}{a_p} \right| < |x|^{\mu+1}$$

et les modules des polynomes a, b sont tous inférieurs à $|x|^{m-1}$. On peut donc trouver un nombre positif k_1 tel que l'on ait, à partir d'une certaine valeur r'' de $|x|$, l'inégalité

(6) Module du numérateur de $v' < k_1 |x|^{2n-m-2}$.

Soit alors r_0 un nombre supérieur à r, r', r'' et tel que, pour $|x| > r_0$, l'on ait

$$\frac{k_1}{k}|x|^{n-2} < e^{\frac{1}{2}|x|^{n-1}}.$$

Si, lorsque $|x|$ *croît à partir de* r_0, *l'inégalité* (4) *est satisfaite sur le rayon* R, les inégalités (5) et (6) y seront également satisfaites, de même que l'égalité (3). Il en résultera que

$$|v'| < \frac{k_1}{k}\,\frac{|x|^{2n-m-2}}{|u|} < |x|^{n} e^{-\frac{1}{2}|x|^{n-1}}.$$

Posons $|x| = r$, et soit v_0 la valeur que prend v sur le rayon R au point x_0 de module r_0. Nous aurons

$$|v - v_0| < \int_{r_0}^{r} (n-1)\, r^{n-2} e^{-\frac{1}{2}r^{n-1}}\,dr < e^{-\frac{1}{2}r_0^{n-1}} - e^{-\frac{1}{2}r^{n-1}}.$$

Dès lors, si nous choisissons une valeur initiale v_0 satisfaisant à l'inégalité

(7) $$|v_0| > c + e^{-\frac{1}{2}r_0^{n-1}},$$

où c *est un nombre positif*, le module de v, lorsque x s'éloignera *sur* R, *restera compris* entre les limites

(8) $$c < |v| < |v_0| + e^{-\frac{1}{2}r_0^{n-1}}.$$

Nous avons obtenu cette double inégalité (8) en supposant l'inégalité (4). *Or partons* du point x_0 avec une valeur initiale v_0 vérifiant l'inégalité (7). *A fortiori,* on aura en x_0 l'inégalité (4). *D'ailleurs, lorsque* x *s'éloigne* sur R, la double inégalité (8) ne *peut cesser d'être vérifiée* tant que l'inégalité (4) est elle-même *vérifiée. Mais, réciproquement,* tant que $|v|$ est supérieur à c,

[$|u|$ satisfaisant à (3)], on a

$$|uv| > ce^{k|x|^{\mu+1}};$$

donc l'inégalité (4) ne peut cesser d'être vérifiée avant l'inégalité (8). On en conclut que les inégalités (4) et (8) ne cessent, ni l'une ni l'autre, d'être vérifiées lorsque x s'éloigne sur R.

La persistance de la double inégalité (8) étant ainsi établie, nous pouvons résumer les résultats acquis et formuler les conclusions suivantes :

Appelant y une intégrale quelconque de l'équation (2), nous posons

$$(9) \qquad y = uv, \qquad u = c^{\int_0^x \frac{b_p}{a_p} dx}$$

et nous considérons les $\mu + 1$ angles, ayant pour sommet l'origine, où l'on a, à partir d'une certaine valeur de $|x|$,

$$|u| > c^{k|x|^{\mu+1}} \quad (k \text{ nombre positif indépendant de } x).$$

Dans l'un quelconque, A, de ces angles, nous prenons un point x_0 dont le module est supérieur à certains nombres que nous avons définis ; puis, lorsque x s'éloigne indéfiniment dans l'angle A à partir de x_0, nous considérons la branche d'intégrale y qui prend en x_0 la valeur initiale $y_0 = v_0 u(x_0)$.

Cela posé, nous avons démontré que, SI LE MODULE DE LA VALEUR INITIALE v_0 EST SUPÉRIEUR A $e^{-\frac{k}{2}|x_0|^{\mu+1}}$, LA BRANCHE D'INTÉGRALE (9) A, DANS L'ANGLE A POUR $|x| > r_0$, UN MODULE VÉRIFIANT LA DOUBLE INÉGALITÉ

$$e^{\lambda|x|^{\mu+1}} < |y| < e^{\lambda_1|x|^{\mu+1}},$$

λ et λ_1 étant des nombres positifs non nuls, indépendants de x.

Ainsi, il existe une infinité de branches d'intégrales de (2) qui, dans les $\mu + 1$ angles que nous avons définis, se comportent comme des exponentielles. Ces branches ne présentent, dans les angles considérés, ni zéro, ni pôle, ni point singulier. Nous dirons que leur croissance est du TYPE EXPONENTIEL.

Les résultats que nous venons d'énoncer supposent, on s'en souvient, que le degré du polynome b_p est supérieur ou égal au degré du polynome a_p, en d'autres termes que $\mu \geqq 0$. Si μ était

négatif, il serait vain d'étudier, pour $|x|$ très grand, la croissance des branches d'intégrales de (2) : car, en général, ces branches ne croîtraient pas indéfiniment avec $|x|$ (du moins lorsque $\mu < -1$). En revanche, si l'on connaît une intégrale *rationnelle* Y de l'équation (2), on pourra parfois ramener le cas $\mu < 0$ au cas $\mu \geqq 0$. Faisons, en effet, sur l'équation (2) le changement de variable

$$y - Y = \zeta = \eta^{-1}.$$

L'équation différentielle à laquelle satisfait ζ admet l'intégrale particulière $\zeta = 0$. Elle est donc de la forme

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{g_1\zeta + \ldots + g_p\zeta^p}{l_0 + \ldots + l_{p-1}\zeta^{p-1}}.$$

On en conclut que l'équation à laquelle satisfait η est une équation rationnelle de la forme (2). Si dans cette équation la différence μ est positive ou nulle, nous pouvons appliquer notre théorème. Nous constatons que, dans les $\mu + 1$ angles définis plus haut, l'intégrale générale se rapproche indéfiniment (lorsque $|x|$ va en croissant) de l'intégrale rationnelle Y. Dans ces angles la différence $y - Y$ est comparable à l'exponentielle $e^{-\lambda'|x|^{\mu+1}}$, λ' restant compris entre deux nombres positifs indépendants de x.

II. — *Branches d'intégrales à croissance rationnelle.*

Nous allons supposer maintenant que dans l'équation différentielle

$$(10) \qquad y' = \frac{\mathfrak{P}(x, y)}{\mathfrak{Q}(x, y)} = \frac{b_0 + \ldots + b_p y^p}{a_0 + \ldots + a_q y^q}$$

les degrés p et q des polynomes p et q ne sont pas liés par la relation $p - q = 1$.

A. Soit, en premier lieu, $p - q < 1$, c'est-à-dire $q \geqq p$. Dans cette hypothèse, les intégrales de l'équation (10) ne présentent aucun infini à distance finie. En effet, si l'on pose $y = z^{-1}$, z satisfait à une équation différentielle dont aucune intégrale (excepté l'intégrale particulière $z = 0$) ne s'annule à distance finie. Je vais

démontrer que, lorsque $|x|$ augmente indéfiniment, *une branche d'intégrale quelconque de l'équation* (1) *croît moins vite qu'une puissance finie de* $|x|$.

Pour donner un sens précis à cet énoncé il faut définir la nature du chemin sur lequel x s'éloigne indéfiniment. J'appellerai dorénavant *chemin direct* (dans le plan de la variable x) tout chemin dont la longueur est finie ou qui est transformé, par le changement de variable $x = \xi^{-1}$, en un chemin de longueur finie. Plus précisément, si $\bar{x}$, $\bar{x}'$ sont deux points quelconques d'un chemin direct L, je suppose que *le rapport* $\dfrac{\text{arc } \bar{x}\bar{x}'}{\text{corde } \bar{\bar{x}}\bar{\bar{x}}'}$ *est inférieur à un nombre donné k qui conservera une valeur fixe dans tous nos calculs.*

Cette définition donnée, appelons σ un entier supérieur aux degrés de tous les polynomes a et b. Je dis que, LORSQUE x S'ÉLOIGNE INDÉFINIMENT SUR UN CHEMIN DIRECT, TOUTE BRANCHE D'INTÉGRALE DE (10) SATISFAIT, A PARTIR D'UNE CERTAINE VALEUR DE x, A L'INÉGALITÉ

$$|y| < |x|^{\sigma+2}.$$

Faisons d'abord une remarque préliminaire : *il n'est pas possible qu'on ait, à partir d'une certaine valeur de* $|x|$, *l'inégalité*

$$(11) \qquad |y| > |x|^{\sigma+1+\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

en tout point d'un chemin direct L *prolongé indéfiniment.*

En effet, soient p' et q' les degrés (en x) des polynomes b_p et a_q, et soient respectivement $\bar{b}_p$ et $\bar{a}_q$ les coefficients de $x^{p'}$ et $x^{q'}$ dans ces polynomes. Quelque petit que soit ε, on peut trouver un nombre r tel que, pour $|x| > r$ et $|y| > |x|^\sigma$, on ait

$$\left| \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} - \frac{\bar{b}_p x^{p'} y^p}{\bar{a}_q x^{q'} y^q} \right| < \varepsilon \left| \frac{x^{p'} y^p}{x^{q'} y^q} \right|.$$

Dès lors, si x est extérieur au cercle S de rayon r qui a pour centre l'origine, l'inégalité (11) entraîne, pour une branche quelconque de (10),

$$(12) \qquad \left| y^{q-p} y' - \frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_q} x^{p'-q'} \right| < \varepsilon |x|^{p'-q'}.$$

Admettons qu'à partir d'un point x_0 on ait l'inégalité (11) tout le long d'un chemin direct L, sur lequel $|x|$ est croissant. Appelant $\bar{x}$ un point quelconque de ce chemin, nous aurons, si $p'-q'>0$,

$$\int_{\text{arc } x_0 \bar{x}} |x^{p'-q'}\,dx| < k|\bar{x}|^{p'-q'}|\bar{x}-x_0| < k|\bar{x}|^{\sigma}|\bar{x}-x_0|,$$

k étant le nombre fixe qui figure dans la définition des chemins directs que nous avons donnée plus haut. Intégrons les deux membres de (12) le long de l'arc $x_0\bar{x}$, il viendra ([1])

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \dfrac{[y(\bar{x})]^{q-p+1}-[y(x_0)]^{q-p+1}}{q-p+1} - \dfrac{\bar{b}_p}{\bar{a}_q}\,\dfrac{\bar{x}^{p'-q'+1}-x_0^{p'-q'+1}}{p'-q'+1} \right| \\ < \varepsilon k|\bar{x}|^{\sigma}|\bar{x}-x_0|. \end{array} \right.$$

D'après nos hypothèses, $q-p+1$ est supérieur ou égal à 1. D'autre part, $p'-q'+1$ est inférieur à $p'+1$, *a fortiori* à $\sigma+1$. Donc, lorsque $|x|$ croîtra indéfiniment, l'inégalité (13) donnera certainement, à partir d'une certaine valeur de $|\bar{x}|$,

$$|y(\bar{x})| < |\bar{x}|^{\sigma+1+\varepsilon},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε. D'où il faut conclure que l'hypothèse selon laquelle l'inégalité (11) serait satisfaite, à partir de x_0, sur tout le chemin L, est une hypothèse inadmissible. Quel que soit le nombre positif α, il existe sûrement sur L des points de modules arbitrairement grands où $|y| \leqq |x|^{\sigma+1+\alpha}$.

Cette remarque faite, je démontre que, sur le chemin direct L où $|x|$ est croissant, il ne saurait y avoir des points $\bar{x}$ arbitraire-

---

([1]) On sait que, si l'on intègre une fonction $f(x)$ le long d'un chemin L quelconque, on a l'inégalité

$$\left|\int_L f(x)\,dx\right| < \int_L |f(x)\,dx|.$$

Je suppose, en écrivant l'inégalité (13), que $\mu = p'-q'$ n'est pas égal à -1. La démonstration subsiste d'ailleurs lorsque $\mu=-1$, à cela près que $x^{1+\mu}-x_0^{1+\mu}$ est remplacé par $\log\dfrac{x}{x_0}$.

ment éloignés où l'on ait

$$(14) \qquad |y| > |x|^{\sigma+2}.$$

Supposons, en effet, qu'il existe de tels points $\bar{x}$. D'après la remarque précédente, on pourra toujours trouver sur L (si $|\bar{x}|$ est assez grand) des points x_0, tels que $r < |x_0| < |\bar{x}|$, où l'on aura

$$|y(x_0)| = |y_0| \leqq |x_0|^{\sigma+1+\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Parmi ces points, appelons spécialement x_0 le dernier rencontré avant d'arriver en $\bar{x}$ (lorsqu'on suit le chemin L en se dirigeant vers l'infini). Nous aurons, en x_0, $|y_0| = |x_0|^{\sigma+1+\alpha}$, sur l'arc $x_0\bar{x}$ de L, $|y| > |x|^{\sigma+1+\alpha}$. Dès lors, l'inégalité (13) sera vérifiée, comme plus haut, sur l'arc $x_0\bar{x}$. Posant $p' - q' = \mu$ et remplaçant $|y_0|$ par sa valeur, on aura

$$|y(\bar{x})^{q-p+1}| < |x_0|^{(\sigma+1+\alpha)(q-p+1)} + \left[\frac{|\bar{x}^{\mu+1} - x_0^{\mu+1}|}{\mu+1} + \varepsilon k |\bar{x}|^{\mu+1}\right].$$

Étant donné que $\dfrac{\mu+1}{q-p+1} \leqq \sigma + 1$, il est clair que, lorsque $|\bar{x}|$ dépasse un certain nombre, la dernière inégalité écrite est incompatible avec l'inégalité (14). On est donc conduit à une contradiction si l'on suppose l'inégalité (14) vérifiée pour des valeurs de $|\bar{x}|$ arbitrairement grandes. Ce qui démontre le théorème énoncé.

B. Soit, en second lieu, $p - q > 1$ ou $p - q \geqq 2$. Dans cette hypothèse, les intégrales y de l'équation (10) ont, en général, des infinis à distance finie. On ne peut donc plus, lorsque x s'éloigne indéfiniment sur un chemin direct quelconque, assigner une limite supérieure au module de y. Néanmoins, en nous inspirant de la théorie des fonctions méromorphes, nous obtiendrons quelques indications intéressantes sur la croissance des intégrales y.

Pour étudier ces intégrales, j'établirai deux lemmes préliminaires.

Lemme I. — *Appelons x_i un infini de l'intégrale y, σ un entier supérieur aux degrés de tous les polynomes a et b. Je dis que, si $|x_i|$ est supérieur à un certain nombre r, on peut*

entourer x_i d'un cercle c_i jouissant des propriétés suivantes :

1° *A l'intérieur et sur le contour de c_i, la branche d'intégrale infinie en x_i a un module supérieur à $|x|^{\sigma+1+\alpha}$, α étant un nombre positif arbitrairement petit ;*

2° *Sur le contour de c_i, le même module est inférieur à $|x|^{\sigma+1+\beta}$, β étant un nombre positif compris entre α et 1.*

Au voisinage de x_i, on a l'inégalité (11)

$$|y| > |x|^{\sigma+1+\alpha}$$

sur tout arc issu de x_i. Or nous avons vu qu'on peut trouver un nombre r tel que, pour $|x_i| > r$, *l'inégalité* (11) *entraîne l'inégalité* (12). Intégrant cette inégalité le long d'un chemin direct, nous aurons, puisque $q - p + 1 < 0$ et $[y(x_i)]^{q-p+1} = 0$,

$$(15) \qquad \left|\bar{y}^{-(p-q-1)} - \frac{p-q-1}{1+\mu}\left(x^{1+\mu} - x_i^{1+\mu}\right)\right| < \varepsilon k(p-q-1)\,|\bar{x}|^{\mu}\,|x - x_i|,$$

où $|\bar{x}|^{\mu}$ est la plus grande valeur de $|x|^{\mu}$ sur le chemin $x_i x$, μ la différence des degrés p' et q', et ε un nombre qui sera arbitrairement petit si l'on a pris r assez grand ([1]).

Autour de x_i comme centre, traçons un cercle c_i de rayon

$$\rho = |x_i|^{-(\sigma+1+\alpha')(p-q-1)-\mu},$$

α' étant un nombre positif inférieur à 1. L'exposant de $|x_i|$ dans l'expression de ρ sera négatif, puisque $|\mu| < \sigma$, $p - q - 1 \geqq 1$. Donc le rayon de c_i tendra vers zéro avec $|x_i|^{-1}$.

D'ailleurs, si $|x_i|$ est assez grand, nous aurons, en tout point du chemin $x_i x$ intérieur à c_i, les inégalités ([2])

$$|x - x_i|\,(|x_i| \mp \rho)^{\mu} < \left|\frac{x^{1+\mu} - x_i^{1+\mu}}{1+\mu}\right| < |x - x_i|\,(|x_i| \pm \rho)^{\mu},$$

$$|x - x_i|\,(|x_i| \mp \rho)^{\mu} < |\bar{x}^{\mu}|\,|x - x_i| < |x - x_i|\,(|x_i| \pm \rho)^{\mu},$$

---

(1) *Voir* p. 46, note.

(2) Ces inégalités s'obtiennent aisément. D'une manière générale, posons

$$|x - x_i| = |x_i|^{1-\beta} \underset{\pm}{\leq} \rho \qquad (\beta > 0);$$

on a

$$\frac{x^{1+\mu} - x_i^{1+\mu}}{1+\mu} = (x - x_i)\,x_i^{\mu}\left[1 + \frac{\mu-2}{1.2}e^{i\omega}|x_i|^{-\beta} + \frac{(\mu-2)(\mu-3)}{2.3}e^{2i\omega}|x_i|^{-2\beta} + \ldots\right],$$

où l'on devra prendre les signes supérieurs ou les signes inférieurs suivant que $\mu > 0$ ou $\mu < -1$; et, d'autre part, *étant donnée la valeur de* ρ *en fonction de* x_i, on peut (quel que soit le nombre positif $\alpha'' < \alpha'$) prendre r assez grand pour que l'on ait, lorsque $|x_i| > r$,

$$(1+\varepsilon k)(p-q-1)\rho(|x_i| \pm \rho)^{\mu} < (|x_i| - \rho)^{-(\sigma+1+\alpha'')(p-q-1)},$$
$$(1-\varepsilon k)(p-q-1)\rho(|x_i| \mp \rho)^{\mu} > (|x_i| + \rho)^{-(\sigma+1+\alpha'+\alpha'')(p-q-1)}.$$

Interprétons alors l'inégalité (15) en supposant r ainsi déterminé. Un calcul facile nous montrera que l'on a, en tout point de c_i,

$$(16) \qquad |y|^{-(p-q-1)} < |x|^{-(\sigma+1+\alpha'')(p-q-1)}$$

et, sur le contour de c_i,

$$(17) \qquad |y|^{-(p-q-1)} > |x|^{-(\sigma+1+\alpha'+\alpha'')(p-q-1)}.$$

Si l'on a pris α, α', α'' assez petits pour que

$$\alpha < \alpha'', \qquad \beta = \alpha' + \alpha'' < 1,$$

on conclura de ces deux dernières inégalités que le cercle c_i satisfait bien aux conditions posées par l'énoncé du lemme.

Or, remontons le fil de notre démonstration. Nous venons d'établir que, lorsque x s'éloigne de x_i dans c_i, aussi longtemps que l'inégalité (11) est vérifiée, il en est de même des inégalités (15), (16), (17). Je dis qu'aucune de ces inégalités ne peut cesser d'être vérifiée dans c_i. En effet, supposons que l'inégalité (11), satisfaite sur l'arc $x_i x'$, cesse de l'être au point x'; sur l'arc $x_i x'$, on aura l'inégalité (16), laquelle entraîne, *a fortiori,*

ω étant un angle réel. Donc, si $|x_i|$ est assez grand, le module du second membre sera sûrement compris entre les limites

$$|x - x_i|\,|x_i|^{\mu}\left[1 - \frac{|\mu-2|+1}{2}|x_i|^{-\beta}\right], \quad |x - x_i|\,|x_i|^{\mu}\left[1 + \frac{|\mu-2|+1}{2}|x_i|^{-\beta}\right]$$

et, *a fortiori,* entre les limites

$$|x - x_i|\left[|x_i|^{\mu} \mp \frac{|\mu-2|+1}{2}|x_i|^{\mu-1}\rho\right],$$

d'où l'on déduira les inégalités écrites.

l'inégalité (11); donc cette dernière est nécessairement satisfaite sur un arc plus grand que $x_i x'$. Le premier lemme est donc complètement démontré.

Nous avons supposé, tout à l'heure, la valeur initiale $y(x_i)$ infinie. On voit sans peine que cette hypothèse n'est pas indispensable; il suffirait de modifier légèrement les formules écrites pour appliquer la démonstration précédente au cas où, au point x_i, on a seulement l'inégalité

$$(18) \qquad |y(x)| > |x|^{\sigma+1+\gamma} \quad \text{avec} \quad \gamma > \beta.$$

Je puis donc énoncer le lemme suivant :

Lemme II. — *Soit une branche d'intégrale y qui satisfait en un point x'_i à l'inégalité* (18). *Si $|x'_i|$ est supérieur à un certain nombre r, on peut entourer x'_i d'un cercle c'_i de rayon*

$$\rho = |x'_i|^{-(\sigma+1+\alpha')(p-q-1)-\mu} \qquad (\alpha' < \beta - \alpha),$$

à l'intérieur duquel $|y|$ est supérieur à $|x|^{\sigma+1+\alpha}$, et sur le contour duquel $|y|$ est inférieur à $|x|^{\sigma+1+\beta}$ $(\alpha < \beta < \gamma)$.

On en conclut de là que la branche y devient nécessairement infinie à l'intérieur de c'_i. En effet, lorsque $|y|$ croît depuis $|y(x'_i)|$ jusqu'à l'infini, le point x, variant à partir de x'_i, ne peut sortir de c'_i; il décrit un chemin l aboutissant en un point x_i intérieur à c'_i. Traçons le cercle c_i relatif à ce point x_i (en appliquant le premier lemme). Le chemin l sera tout entier contenu dans c_i. Donc x'_i est à l'intérieur de c_i.

De ces divers résultats nous déduirons le théorème suivant :

Soit x un point quelconque extérieur aux cercles c_i décrits autour des infinis x_i d'une branche d'intégrale y. Pourvu que $|x|$ dépasse un certain nombre fini r, la branche d'intégrale considérée satisfait à l'inégalité

$$|y(x)| < |x|^{\sigma+2}.$$

En effet, d'après le second lemme, tout point x'_i où cette inégalité n'est pas satisfaite est intérieur à un cercle c_i.

Quelle est la portée du théorème que nous venons d'énoncer?

Il est clair que ce théorème ne nous intéressera qu'autant qu'il existera des points x extérieurs à tous les cercles c_i. Nous sommes ainsi conduits à étudier plus en détail les cercles c_i et leur distribution.

En premier lieu, je dis que *la branche d'intégrale qui est infinie en x_i ne présente pas, à l'intérieur de c_i, d'autre infini que x_i.*

Pour le démontrer en toute rigueur, nous introduirons dans l'équation (10) un paramètre variable μ (conformément à la méthode exposée au Chap. I, § V).

Considérons l'équation

$$y' = \frac{b_p y^p + \mu(b_{p-1} y^{p-1} + \ldots + b_0)}{a_q y^q + \mu(a_{q-1} y^{q-1} + \ldots + a_0)} \tag{19}$$

et faisons varier μ de 0 à 1. D'après notre premier lemme [1], la branche d'intégrale y_μ de (19) qui est infinie en x_i satisfait (*quel que soit* μ) à l'inégalité (16) dans c_i et à l'inégalité (17) sur le contour de c_i. D'ailleurs, aucun point de c_i où y_μ est fini ne peut être critique pour cette intégrale. En effet, nous supposons r assez grand (p. 45) pour que $|x| > r$ et $|y| > |x|^\sigma$ entraînent

$$\left| \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} - \frac{\overline{b}_p}{\overline{a}_p} x^{p'-q'} y^{p-q} \right| < \varepsilon \, | x^{p'-q'} y^{p-q} |.$$

Donc l'intégrale y_μ satisfait à cette inégalité dans c_i. Dès lors, à l'intérieur de c_i, $Q(x, y_\mu)$ ne saurait s'annuler pour aucune valeur finie de y_μ.

Nous concluons de là que les théorèmes du Chapitre I (§ V) sont applicables à l'intérieur et sur le contour de c_i. Si, pour une valeur μ_0 de μ, y_μ n'a qu'un infini dans c_i, elle n'en aura encore qu'un pour les valeurs de μ voisines de μ_0. Or, nous savons que, lorsque μ est nul, l'intégrale y_μ n'a dans c_i qu'un infini x_i; supposons que, pour $\mu = 1$, elle en ait plusieurs; alors, il devra exister des valeurs μ' de $\mu (0 < |\mu'| < 1)$ pour lesquelles y_μ aura un ou plusieurs infinis *sur le contour* de c_i; mais, d'après l'iné-

---

[1] La valeur que nous avons assignée au rayon ρ de c_i ne dépend que des exposants p, q, p', q', σ; elle est donc indépendante de μ.

galité (17), cette circonstance ne peut se présenter; donc l'hypothèse faite est inadmissible.

D'ailleurs, d'après ce que nous venons de dire, *la branche d'intégrale infinie en x_i ne présente aucun point critique dans c_i, sauf peut-être au point x_i* lui-même. Le point x_i sera critique si $p - q \geqq 3$; il permutera $p - q - 1$ déterminations.

Des propriétés des cercles c_i que pouvons-nous conclure relativement à leur distribution dans le plan de la variable x?

Si l'intégrale y qui est infinie aux points $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ était une fonction uniforme de x, nous pourrions affirmer que les cercles c_i relatifs aux points x_i seraient tous extérieurs les uns aux autres (du moins pour $|x_i| > r$).

Appelons en effet α_1 un nombre positif inférieur au nombre α qui figure dans l'énoncé du premier lemme, et appliquons de nouveau ce lemme, en remplaçant α par α_1, β par α : on peut entourer le point x_i d'un cercle c'_i tel que l'on ait, dans ce cercle, $|y| > |x|^{\sigma+1+\alpha_1}$, et sur son contour $|y| < |x|^{\sigma+1+\alpha}$. Le cercle c'_i est concentrique au cercle c_i, mais de rayon plus grand; comme c_i, il ne contient d'autre infini de y que le point x_i. Dès lors, si le cercle c_j relatif à x_j coupait le cercle c_i, il couperait nécessairement le contour de c'_i. Il y aurait donc un arc de c'_i intérieur à c_j sur lequel on devrait avoir (premier lemme)

$$|y| > |x|^{\sigma+1+\alpha},$$

ce qui n'est pas possible, d'après la définition de c'_i : on en conclut que les cercles c_i et c_j ne se coupent pas.

Les choses se passent autrement lorsque l'intégrale y est une fonction multiforme; il peut arriver alors que toute valeur de x soit intérieure à un ou plusieurs cercles c_i. Mais nous pourrons néanmoins ramener ce cas au précédent, à condition de faire varier x non plus sur un plan, mais sur une surface de Riemann.

J'ai rappelé (p. 31) qu'on peut toujours regarder y comme fonction uniforme d'un point mobile sur une surface de Riemann, surface formée de feuillets superposés sur lesquels on a tracé un certain nombre de fentes (coupures) et que relient entre eux des lignes de croisement menées suivant certaines coupures.

Si $p - q < 3$ les points x_i sont, nous l'avons dit, des points ordinaires de y : on peut alors disposer des coupures de manière

qu'elles ne pénètrent pas dans les cercles c_i. Si $p-q \geqq 3$, $p-q-1$ déterminations se permutent autour de x_i; la surface de Riemann a, par suite, au voisinage de x_i, $p-q-1$ feuillets reliés entre eux par des lignes de croisement issues de x_i; d'ailleurs, nous pouvons toujours disposer de ces lignes de croisement de manière qu'au voisinage de x_i elles coïncident avec un même rayon du cercle c_i. Dans l'un ou l'autre de ces deux cas, le raisonnement de la page précédente est applicable à la surface de Riemann. Il établit que, sur cette surface, *les cercles c_i relatifs aux points x_i sont tous extérieurs les uns aux autres* (du moins pour $|x_i| > r$).

Nous voici maintenant en état de tirer de la proposition de la page 50 toutes les conséquences qu'elle comporte.

Étant donnée une branche d'intégrale quelconque de l'équation (10), regardons-la comme fonction uniforme d'un point variable sur une surface de Riemann. SUR CETTE SURFACE IL EST TOUJOURS POSSIBLE DE TRACER DES CHEMINS DIRECTS S'ÉLOIGNANT INDÉFINIMENT ET NE PÉNÉTRANT DANS AUCUN CERCLE c_i [il suffit [1] de faire passer les chemins entre les cercles c_i]; EN TOUT POINT DE CES CHEMINS, ON A, A PARTIR D'UNE CERTAINE VALEUR DE $|x|$, L'INÉGALITÉ

$$|y| < |x|^{\sigma+2},$$

où σ désigne un entier supérieur aux degrés de tous les coefficients a et b de l'équation (10). La propriété, démontrée sur la surface de Riemann, subsiste d'ailleurs, bien entendu, si l'on regarde les chemins considérés comme des chemins plans.

En quoi ce résultat distingue-t-il l'équation (10) de l'équation (2) étudiée au paragraphe précédent? Nous avons obtenu des intégrales de (2) qui croissent plus vite qu'une certaine exponentielle $e^{\lambda|x|^{\mu+1}}$ (si $\mu > 0$) quand x s'éloigne indéfiniment dans certains angles A [d'ailleurs le rapport de l'aire totale des angles A à l'aire d'un demi-plan est un nombre $(1-\alpha)$ arbitrairement voisin de 1]; c'est pourquoi nous étions convenus de dire que la croissance des

---

(1) On partira d'une droite et l'on remplacera tout segment intérieur à un cercle c_i par le plus petit arc de c_i qui sous-tend ce segment. Le chemin ainsi obtenu sera sûrement direct.

intégrales de (2) est du type exponentiel. Au contraire, nous constatons que les intégrales de (10) croissent moins vite qu'une puissance finie de $|x|$ lorsque x s'éloigne indéfiniment sur un chemin, qui est assujetti (si $p-q \geqq 2$) à ne pas pénétrer dans certains cercles c_i; d'ailleurs, lorsque les cercles c_i sont infiniment éloignés, leurs rayons deviennent infiniment petits, et il serait facile de démontrer que le rapport de l'aire totale des cercles c_i à l'aire de la surface de Riemann sur laquelle ils sont tracés est égal à o. C'est pourquoi nous conviendrons de dire que la croissance des intégrales de (10) est du TYPE RATIONNEL.

Nous obtenons ainsi une première indication sur les intégrales de l'équation (10); mais c'est une indication bien vague encore. Ainsi, nous avons trouvé une limite supérieure ([1]) du module de y, mais pas de limite inférieure. Il y aurait donc lieu de poursuivre l'étude que nous venons d'ébaucher, et peut-être conviendrait-il, pour la pousser plus avant, de particulariser le problème. On ferait certainement œuvre utile en entreprenant une série d'études monographiques sur l'allure des intégrales des divers types simples d'équations (1). On obtiendrait ainsi de précieux renseignements sur la nature des fonctions qui satisfont à ces équations et sur les complications qui s'introduisent lorsqu'on élève les degrés des coefficients. C'est ce dont nous allons nous rendre compte en traitant ici même quelques-uns des cas les plus simples.

III. — *L'équation* $y'+A_0+A_1y+A_2y^2+A_3y^3=0$: *Premier exemple.*

Considérons l'équation

$$y'+A_0+A_1y+A_2y^2+A_3y^3=0, \tag{20}$$

([1]) C'est dans le cas où les branches d'intégrales y augmentent indéfiniment (quand x s'éloigne vers l'infini sur certains chemins directs) qu'il est intéressant de connaître une limite supérieure de $|y|$. Si les branches y, au lieu de tendre vers l'infini, tendaient vers une valeur finie A, on pourrait leur appliquer les résultats des pages précédentes, à condition de faire le changement de variable $y-A=y^{-1}$. On verrait alors que $\frac{1}{y-A}$ croît moins vite que $|x|^{\sigma+2}$.

où les A sont des polynomes en x. Pour étudier en détail la croissance des intégrales de cette équation, il y aurait lieu de distinguer un grand nombre de cas et de sous-cas :

I. Supposons d'abord que $A_0 = A_1 = 0$, et soient m_2 et m_3 les degrés des polynomes A_2 et A_3. Les intégrales de l'équation

$$(21) \qquad y' + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0$$

ou de l'équation transformée

$$y = z^{-1}, \qquad zz' = A_2 z + A_3$$

sont, au point de vue de la croissance, du type rationnel. Admettons *a priori* (ce qu'il faudra ensuite vérifier) que les intégrales z deviennent infinies comme une puissance déterminée x^τ de z, et cherchons quelle devra être, dans cette hypothèse, la valeur de τ. Les termes zz', $A_2 z$, A_3 deviendront respectivement infinis comme $x^{2\tau-1}$, $x^{m_2+\tau}$, x^{m_3}. Puisque ces termes doivent se détruire, il faut que deux des trois quantités $2\tau - 1$, $m_2 + \tau$, m_3 soient égales entre elles et supérieures ou égales à la troisième. D'où les cas suivants :

1. $2\tau - 1 = m_3 > m_2 + \tau$. Ce cas se présentera si $m_3 > 2m_2 + 1$.
2. $2\tau - 1 = m_2 + \tau > m_3$.
3. $m_2 + \tau = m_3 > 2\tau - 1$. } Ces cas se présenteront si $m_3 < 2m_2 + 1$.
4. $2\tau - 1 = m_3 = m_2 + \tau$. Ce cas se présentera si $m_3 = 2m_2 + 1$.

Il y aura lieu, si l'on entreprend une étude complète de l'équation (21), de considérer séparément ces différents cas et peut-être de les subdiviser.

II. Supposons en second lieu que $A_0 = 0$, $A_1 \neq 0$. Le degré de A_1 étant positif ou nul, les intégrales de l'équation transformée

$$y = z^{-1}, \qquad zz' = A_1 z^2 + A_2 z + A_3$$

seront du type exponentiel. On pourra leur appliquer les résultats obtenus au premier paragraphe de ce Chapitre.

III. Supposons enfin que A_0 ne soit pas identiquement nul. Les intégrales de (20) seront alors du type rationnel. Mais il est à

prévoir que la croissance de ces intégrales offrira plus de complications que celle des intégrales de l'équation (21). Les circonstances les plus diverses pourront se présenter dans ce cas.

La discussion complète de la croissance des intégrales de l'équation (20) serait, on le voit, longue et laborieuse. Je me bornerai à l'étude de l'équation (21), en supposant d'abord $m_3 > 2m_2 + 1$, puis $m_3 < 2m_2 + 1$. Je vais calculer, dans ces deux cas, non plus seulement une limite supérieure, mais une *valeur approchée des branches d'intégrales en un point quelconque du plan des x.*

Premier exemple. — *Allure des branches d'intégrales de l'équation*

$$zz' = A_2 z + A_3 \tag{22}$$

lorsque les degrés m_2 et m_3 de A_2 et A_3 satisfont à l'inégalité $m_3 > 2m_2 + 1$, c'est-à-dire $m_3 \geqq 2m_2 + 2$.

Posant $z = \sqrt{\zeta}$, nous pouvons encore écrire l'équation (22) sous la forme

$$\zeta' = 2A_2\sqrt{\zeta} + 2A_3. \tag{23}$$

Nous tracerons autour de l'origine un cercle S ayant un grand rayon r (la valeur de r sera déterminée par diverses conditions énoncées au cours de la démonstration), et nous considérerons une branche d'intégrale z qui admette pour point critique un point x_1 de module supérieur à r.

Soit $\frac{a_3}{2}$ le coefficient de x^{m_3} dans A_3. Nous choisirons r de manière que l'on ait, lorsque $|x| > r$,

$$|2A_3 - a_3 x^{m_3}| < |x|^{m_3 - 1 + \varepsilon}, \qquad |2A_2| < |x|^{m_2 + \frac{\varepsilon}{2}} \leqq |x|^{\frac{m_3}{2} - 1 + \frac{\varepsilon}{2}}, \tag{24}$$

et, lorsque $|x| \leqq r$,

$$|2A_3 - a_3 x^{m_3}| < r^{m_3 - 1 + \varepsilon}, \qquad |2A_2| \leqq r^{\frac{m_3}{2} - 1 - \frac{\varepsilon}{2}}, \tag{25}$$

ε étant un nombre qui sera arbitrairement petit avec $\frac{1}{r}$. Suivons alors ζ à partir de x_1.

1. Au point x_1, $z=\sqrt{\zeta}$ est nul. A partir de x_1, *faisons croître* x indéfiniment sur un chemin direct L. Tant que l'on a sur L l'inégalité

$$(26) \qquad |\zeta| < |x|^{m_3+1+\varepsilon},$$

on a, d'après (23) et (24),

$$|\zeta' - a_3 x^{m_3}| < 2\,|x|^{m_3-\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

et par suite, en intégrant,

$$(27) \qquad \left|\zeta(x) - \frac{a_3}{m_3+1}\left(x^{m_3+1} - x_1^{m_3+1}\right)\right| < 2\,k\,|x|^{m_3-\frac{1}{2}+\varepsilon}\,|x-x_1|,$$

k étant le nombre fini qui figure dans la définition des chemins directs (p. 45). Il est clair que, si l'on a pris assez grand le rayon r de S, l'inégalité (27) entraînera *a fortiori* l'inégalité (26), quelque grand que soit $|x|$. Un raisonnement auquel nous avons déjà eu deux fois recours [1] prouve alors que l'inégalité (27) ne cesse pas d'être satisfaite lorsque x s'éloigne indéfiniment sur le chemin L.

2. Faisons maintenant *décroître* x à partir de x_1 sur un chemin direct L intérieur au cercle Σ qui a pour centre l'origine et pour rayon $|x_1|$. Tant que l'on a sur L l'inégalité

$$(28) \qquad |\zeta| < |x_1|^{m_3+1+\varepsilon},$$

on a

$$|\zeta' - a_3 x^{m_3}| < 2\,|x_1|^{m_3-\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

et, en intégrant,

$$(29) \qquad \left|\zeta(x) - \frac{a_3}{m_3+1}\left(x^{m_3+1} - x_1^{m_3+1}\right)\right| < 2\,k\,|x_1|^{m_3+\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Or, si r est assez grand, l'inégalité (29) entraîne *a fortiori* l'inégalité (28) lorsque $|x| > r$. On en conclut que l'inégalité (29) ne cesse pas d'être vérifiée sur le chemin L, à l'intérieur de Σ.

---

[1] *Voir* p. 42 et 49.

Nous interpréterons les deux inégalités (28) et (29) en énonçant la proposition suivante :

Quelque petit que soit δ, on peut trouver un nombre r tel que la branche d'intégrale ζ, qui s'annule en un point critique x_1 de module supérieur à r, soit donnée sur tout chemin direct croissant issu de x_1 par l'égalité

$$(30)\qquad \zeta = \frac{a_3}{m_3+1}(1+\gamma)x^{m_3+1} - \frac{a_3}{m_3+1}x_1^{m_3+1}, \quad \text{où} \quad |\gamma| < \delta,$$

et sur tout chemin intérieur à Σ par l'égalité (1)

$$(31)\qquad \zeta = \frac{a_3}{m_3+1}x^{m_3+1} - \frac{a_3}{m_3+1}(1+\gamma')x_1^{m_3+1}, \quad \text{où} \quad |\gamma'| < \delta.$$

3. Les égalités (30) et (31) nous donnent, pour toute valeur de x, une valeur approchée de la branche d'intégrale ζ de (23).

Pour caractériser cette branche avec précision, nous allons encore nous demander où elle présente des points critiques pouvant la permuter avec d'autres branches.

Je désignerai dorénavant par le mot *caractéristique* une branche d'intégrale suivie, à partir d'un point et d'une valeur initiale donnée, *le long d'un chemin rectiligne*. Partons, par exemple, du point x_0 avec la valeur $\zeta_0 = z_0^2$ définie tout à l'heure et suivons l'intégrale ζ le long d'une droite issue de x_0. Lorsque cette droite tourne autour de x_0 et balaye le plan des x, nous obtenons ce que j'appellerai *l'ensemble des caractéristiques issues de x_0 avec la valeur initiale ζ_0*. Demandons-nous combien nous rencontrerons de points critiques sur cet ensemble de caractéristiques.

En tout point critique, ζ est nul. Or, il résulte des égalités (30) et (31) que les caractéristiques ζ ne sauraient s'annuler qu'au voisinage des (m_3+1) racines de l'équation algébrique

$$x^{m_3+1} = x_1^{m_3+1}.$$

Soit $\overline{x}_1$ l'une de ces racines. Entourons-la d'un cercle c de rayon $\rho = |x_1|^{1-\beta}$, β étant un nombre positif quelconque *inférieur*

(1) D'après cette égalité, la valeur de la branche L à l'origine croît indéfiniment lorsque x_1 tend vers l'infini.

à $\frac{1}{2}$. Je dis que, *dans le cercle c, l'ensemble des caractéristiques considérées présente un point critique et un seul.*

En effet, pour $|x - \overline{x}_1| = \rho$, on a (¹) (si r est assez grand)

$$|x^{m_3+1} - x_1^{m_3+1}| > \rho(m_3+1)(|x_1| - \rho)^{m_3},$$

limite supérieure qui (d'après la valeur de ρ) sera elle-même supérieure à $(m_3+1)|x_1|^{m_3+1-\beta-\varepsilon'}$, où ε' est arbitrairement petit si $|x_1|$ est assez grand. D'autre part, la branche d'intégrale que je considère satisfait, dans c, à l'inégalité (30) ou (31); pour obtenir sa valeur sur le contour de c, je n'ai qu'à partir de x_1 et à me rendre en ligne droite à ce contour. En tout point du chemin ainsi suivi, $|x|$ reste compris entre $\frac{|x_1|}{2}$ et $\frac{3|x_1|}{2}$: il résulte alors de (27) et (29) que les γ et γ' des égalités (30) et (31) ont des modules inférieurs à $|x_1|^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$. On en conclura $\left(\text{puisque } \beta < \frac{1}{2}\right)$ que, si r est assez grand, les termes en γ et γ' sont négligeables dans (30) et (31) sur le contour de c; par conséquent, ζ satisfait sur ce contour à l'inégalité

$$|\zeta| > \left|\frac{a_3(x^{m_3+1} - x_1^{m_3+1})}{2(m_3+1)}\right| > \frac{|a_3|}{2}|x_1|^{m_3+1-\beta-\varepsilon'}$$

et ne peut s'y annuler.

Le résultat que nous obtenons ainsi en étudiant l'équation (23), nous l'aurions aussi bien obtenu si nous avions considéré l'équation

$$\zeta' = a_3 x^{m_3} + \mu\left(\frac{A_2}{2}\sqrt{\zeta} + \frac{A_3}{2} - a_3 x^{m_3}\right),$$

où μ a une valeur quelconque comprise entre 0 et 1. Or, pour $\mu = 0$, l'intégrale ζ qui prend en x_0 la valeur ζ_0 a un zéro et un seul à l'intérieur de c. On en déduit (en raisonnant comme à la page 51) qu'il en est encore ainsi pour $\mu = 1$. C. Q. F. D.

D'où cette conclusion : *l'ensemble des caractéristiques issues de x_0 avec la valeur ζ_0 présente $m_3 + 1$ points critiques, $x_1, \ldots, x_{m_3+1}$, respectivement voisins* (d'autant plus voisins que le module initial $|\zeta_0|$ est plus grand) *des racines de l'équation*

(¹) *Cf.* plus haut, page 48, note 2.

$x^{m_1+1} = x_1^{m_1+1}$. Supposons que nous menions des coupures joignant à l'infini les points $x_1, \ldots, x_{m_1+1}$: si nous assujettissons x à ne pas franchir ces coupures, l'ensemble des caractéristiques considérées constitue *une branche d'intégrale uniforme dans tout le plan*. Nous avons calculé une valeur approchée d'une telle branche en tout point du plan; nous avons déterminé le nombre et la situation approximative de ses points critiques : il restera à examiner par quel mécanisme on peut de cette branche déduire successivement toutes les autres branches d'une même intégrale. C'est là une question dont nous nous occuperons ultérieurement.

IV. — *Deuxième exemple.*

Allure des branches d'intégrales de l'équation

$$zz' = A_2 z + A_3 \tag{22}$$

lorsque les degrés m_2 *et* m_3 *de* A_2 *et* A_3 *satisfont à l'inégalité* $m_3 < 2m_2 + 1$ *ou* $m_3 \leqq 2m_2$.

Posant

$$P(x) = \int_0^x A_2\,dx, \qquad z = P + \theta,$$

nous pouvons écrire l'équation (22) sous la forme

$$\theta' = \frac{A_3}{P + \theta}, \tag{32}$$

où P est de degré $m_2 + 1$. Soient, respectivement, ax^{m_3} et bx^{m_2+1} les termes de plus haut degré dans les polynomes A_3 et P. La valeur des coefficients a et b étant sans influence sur les calculs que nous allons faire, je supposerai, pour simplifier l'écriture, que $a = b = 1$.

Considérons un cercle S de centre o dont le rayon r sera déterminé par diverses conditions posées au cours de la démonstration. Nous allons étudier *la branche d'intégrale* θ *qui, en un point donné* x_0 *extérieur à* S, *prend une valeur initiale que je désignerai par* C^{m_2+1} *et que je supposerai plus grande que* $2r^{m_2+1}$.

Nous choisirons r assez grand pour que l'on ait, en tout point x

extérieur à S,

$$|P(x) - x^{m_2+1}| < r^{-\frac{1}{2}} |x|^{m_2+1}, \qquad |A_3 - x^{m_2}| < r^{-\frac{1}{2}} |x|^{m_2}$$

et, à l'intérieur de S,

$$|P| < \left(1 + r^{-\frac{1}{2}}\right) r^{m_2+1}, \qquad |A_3| < \left(1 + r^{-\frac{1}{2}}\right) r^{m_2}.$$

Suivons alors θ à partir de x_0.

1. En premier lieu, je considérerai la branche θ *à l'intérieur d'un cercle Σ ayant pour centre l'origine et pour rayon* $r^{\frac{1}{8(m_2+1)}} |C|$.

L'équation algébrique

$$P(x) + C^{m_2+1} = 0$$

a $m_2 + 1$ racines qui, si r est assez grand, sont respectivement très voisines des $m_2 + 1$ zéros de $x^{m_2+1} + C^{m_2+1}$. Entourons chacun de ces zéros d'un cercle c de rayon $\rho = 2 r^{-\frac{1}{4}} |C|$. A l'extérieur des cercles c et de S, on aura (quand r sera assez grand)

$$|P + C^{m_2+1}| > |x^{m_2+1} + C^{m_2+1}| - r^{-\frac{1}{2}} |x|^{m_2+1}$$

et (¹)

$$\begin{aligned} |x^{m_2+1} + C^{m_2+1}| &> \rho(m_2+1)(|C| - \rho)^{m_2+1} \\ &> 2(m_2+1) r^{-\frac{1}{4}} \left(1 - 2 r^{-\frac{1}{4}}\right)^{m_2} |C|^{m_2+1}. \end{aligned}$$

D'autre part, x étant intérieur à Σ,

$$r^{-\frac{1}{2}} |x|^{m_2+1} < r^{-\frac{3}{8}} |C|^{m_2+1}.$$

On conclut aisément de là que l'on peut toujours prendre r assez grand pour que l'on ait, lorsque x est compris entre S et Σ et extérieur aux cercles c,

$$(33) \qquad |P + C^{m_2+1}| > r^{-\frac{1}{4}} |C|^{m_2+1}.$$

(¹) *Voir* page 48, note 2.

l'égalité

$$z = (1+\gamma)P(x) + \theta, \tag{39}$$

où l'on a

$$|\gamma| < |x|^{-\frac{1}{2}},$$

si r est assez grand.

En résumé, les formules (36) et (39) donnent [1], sur tout chemin direct croissant ou décroissant et extérieur aux cercles c, une valeur approchée de la branche d'intégrale z issue de x_0 avec la valeur initiale $P + \theta_0$. La branche considérée ne peut présenter des points critiques qu'à l'intérieur des cercles c.

---

(1) Le module de la branche d'intégrale z devient infini (avec $|x|$) comme $|x|^{m_3+1}$. Nous nous trouvons donc en présence du troisième des quatre cas distingués à la page 55, savoir : $2\tau - 1 = m_2 + \tau > m_3$. Quand donc se présentera le quatrième cas ($m_2 + \tau = m_3 > 2\tau - 1$) qui, comme le troisième, doit se rencontrer pour $m_3 < 2m_2 + 1$? En poursuivant l'étude de l'équation (22), on répondrait sans peine à cette question. Considérons la droite joignant à l'infini un point critique x_1, et suivons sur cette droite les deux caractéristiques issues de x_1 avec la valeur critique o. De ces deux caractéristiques, l'une seulement devient infinie comme $|x_0|^{m_3+1}$: c'est de celle-là que nous venons d'étudier la croissance. Si nous voulions être complets, nous devrions encore étudier la seconde caractéristique et nous nous trouverions alors en présence du quatrième cas : $m_2 + \tau = m_3 > 2\tau - 1$.



CHAPITRE III.

CLASSIFICATION DES POINTS SINGULIERS TRANSCENDANTS.

Nous avons déjà établi des distinctions entre les points singuliers de l'équation

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

où P et Q sont des polynomes en y. Parmi ces points singuliers, les uns sont algébriques et mobiles [c'est-à-dire varient avec la valeur initiale y_0 que prend une intégrale quelconque de l'équation (1) en un point x_0], les autres sont fixes et, en général, transcendants. C'est sur ces derniers points que nous allons, dans ce Chapitre, fixer notre attention.

Les points singuliers transcendants sont, pour M. Painlevé, de deux sortes : ou bien la fonction qui présente en un point X une singularité transcendante devient indéterminée lorsque la variable x tend vers X sur un chemin quelconque; ou bien cette fonction tend vers une valeur déterminée Y. Dans le premier cas, le point X est dit *point singulier essentiel :* tel est le point $x = 0$ pour la fonction $e^{\frac{1}{x}}$. Dans le second cas, le point singulier est appelé *point transcendant ordinaire :* exemple, l'origine pour la fonction $\log x$, qui, en ce point, a une valeur déterminée égale à l'infini ([1]).

Nous allons nous placer ici à un autre point de vue, et donner des points transcendants une classification un peu différente.

Nous savons qu'au voisinage d'un point singulier transcendant X il s'opère, en général, une infinité de permutations. Voici, d'une façon précise, ce qu'il faut entendre par là. Considérons un

([1]) Au sujet de ces définitions, on consultera avec profit la *Notice sur les travaux scientifiques* de M. Painlevé. Gauthier-Villars, 1900.

point $\bar{x}$ voisin de X et l'ensemble des valeurs $\bar{y}$ que prend au point $\bar{x}$ la fonction $y(x)$. Soit, d'autre part, γ un cercle de rayon arbitrairement petit entourant le point X et $\bar{x}\alpha$ une droite (ou ligne) joignant $\bar{x}$ à un point du contour γ. Nous supposerons que x décrive un lacet L ainsi composé : le segment $\bar{x}\alpha$, puis un chemin fermé quelconque intérieur à γ, puis le segment $\alpha\bar{x}$. Si, partant avec une valeur initiale $\bar{y}_1$ (prise dans l'ensemble $\bar{y}$) et décrivant tous les lacets L possibles, nous revenons avec diverses valeurs $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$, ..., nous dirons que l'ensemble des valeurs $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$, ... (ensemble partiel de l'ensemble $\bar{y}$) se permutent à l'intérieur de γ. Au cas où, quelque petit que soit le cercle γ, il existe un ensemble partiel infini de valeurs $\bar{y}$ se permutant dans γ, nous dirons qu'une infinité de déterminations se permutent au *voisinage de la singularité* X.

Cela étant, on peut chercher à classer les points singuliers transcendants d'après les propriétés, plus ou moins compliquées, des systèmes de permutations qui s'opèrent en leur voisinage; on s'efforcera, dans chaque cas, de mettre à nu le mécanisme suivant lequel une infinité de déterminations $\bar{y}$ s'échangent entre elles lorsque x décrit tous les lacets L imaginables. C'est une classification de cette nature qui sera tentée dans ce Chapitre. Ici encore, force m'est de me contenter d'un aperçu : je signalerai seulement quelques cas simples que j'illustrerai par des exemples.

I. — *Points directement et indirectement critiques.*

Quelques remarques préliminaires sont ici nécessaires.

Un point transcendant isolé X peut être *directement* critique ou *indirectement* critique; il peut aussi être à la fois directement et indirectement critique.

Pour distinguer ces cas, rappelons-nous qu'un lacet L quelconque peut être décomposé en une somme de *lacets élémentaires* [1] successifs, formés, chacun, d'un chemin issu de $\bar{x}$ par-

[1] Les lacets élémentaires seront toujours supposés *ne pas s'enrouler une infinité de fois autour du point* X.

couru deux fois, et d'une boucle infiniment petite décrite autour d'un point critique *unique*.

Supposons alors qu'il existe en $\bar{x}$ une infinité de déterminations $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots$ qui s'échangent entre elles le long d'un lacet élémentaire décrit autour du point X proprement dit : en ce cas nous regarderons ce point comme *directement critique*. Ainsi l'origine est un point transcendant directement critique pour la fonction $\log x$, et, lorsque λ est irrationnel, pour la fonction x^λ.

Supposons maintenant qu'une infinité de déterminations de la fonction s'échangent entre elles lorsqu'on décrit une série de lacets élémentaires, non plus autour du point X lui-même, mais autour d'un ensemble de points convergeant [1] vers X : nous dirons alors que X est un point transcendant *indirectement critique*.

Afin d'éclairer tout de suite cette définition par un exemple, considérons l'équation différentielle

$$(2) \qquad 2z\frac{dz}{dx} = \alpha x + \beta z.$$

Pour intégrer cette équation, il suffit de poser $z = xw$. Soient w_1 et w_2 les deux racines de $-2w^2 + \beta w + \alpha = 0$. Nous aurons

$$xw\frac{dw}{dx} = -(w - w_1)(w - w_2),$$

et un calcul facile nous donnera l'intégrale générale

$$z = xw, \qquad Cx = (w - w_1)^{\frac{1}{\lambda_1}}(w - w_2)^{\frac{1}{\lambda_2}} \qquad (C = \text{const. arbitraire}),$$

où

$$\lambda_1 = -2 + \frac{\beta}{2w_1}, \qquad \lambda_2 = -2 + \frac{\beta}{2w_2}.$$

Si l'on remarque que $w_1 + w_2 = \frac{\beta}{2}$, on voit que λ_1 et λ_2 sont liés par la relation

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = -1.$$

---

(1) Les points critiques qui convergent vers X sont des points critiques algébriques, puisque nous avons supposé que la singularité transcendante X était isolée.

Dès lors, l'intégrale générale de l'équation (2) se laisse mettre sous la forme

$$(3) \qquad z = wx, \qquad Cx = \frac{1}{w - w_2}\left(\frac{w - w_1}{w - w_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}.$$

Nous allons supposer que λ_1 et λ_2 sont des nombres *complexes* (quelconques) dont la partie réelle est *négative*. Il en est alors de même de $\frac{1}{\lambda_1}$, $\frac{1}{\lambda_2}$: *nous admettrons, pour fixer les idées, que la partie réelle* $\mathcal{R}(\lambda_1)$ *est inférieure à* $\mathcal{R}(\lambda_2)$ *et, par suite, à* $\frac{1}{2}$.

D'après l'égalité (3), l'intégrale z de l'équation (2) prend à l'origine un ensemble infini de valeurs finies pour lesquelles w est infini, savoir les valeurs

$$\ldots, \quad C^{-1}e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_1}}, \quad C^{-1}, \quad C^{-1}e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}, \quad \ldots.$$

Les branches d'intégrales correspondant à ces diverses déterminations sont d'ailleurs toutes holomorphes à l'origine, puisque, d'après le théorème de Cauchy, toute intégrale de (2) non nulle à l'origine y est holomorphe.

Quels sont maintenant les points critiques de l'intégrale z? Ce sont les points

$$(4) \qquad Cx = -\frac{1}{w_2}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}$$

où cette intégrale s'annule. Chacun d'eux permute deux déterminations. Si l'on désigne par x_0 l'un de ces points, les autres seront

$$x_1 = x_0 e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}, \quad x_2 = x_1 e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}, \quad \ldots; \quad x_{-1} = x_0 e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_1}}, \quad \ldots.$$

Admettons, pour fixer les idées, que dans $\frac{1}{\lambda_1}$ le coefficient de $\sqrt{-1}$ soit positif. Alors, tandis que les points x_{-1}, x_{-2}, ... s'éloignent indéfiniment, les points x_1, x_2, ... convergent vers l'origine. L'origine, qui n'est pas directement critique, est donc point-limite de points critiques : d'après notre définition, elle est un point transcendant indirectement critique.

Allons plus loin et demandons-nous quelles déterminations de z se permutent autour des points x_1, x_2, ...

Partons de l'origine avec une détermination

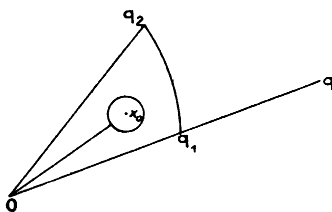
$$z(0) = 0 \times w(0) = C^{-1},$$

et éloignons-nous (*fig.* 2) sur un rayon Oq qui ne passe par aucun point critique x_i. Lorsque x croît indéfiniment sur une droite, la fonction w tend, d'après (3), vers l'une des valeurs w_1, w_2 : nous choisirons Oq de manière que *la limite de w soit w_1 sur ce rayon.* Arrêtons-nous sur Oq en un point q_1 assez éloigné pour que $w(q_1)$ ait une valeur $\overline{w}$ arbitrairement voisine de w_1. Puis, dans le plan de la variable w, faisons décrire un cercle à cette variable autour du point $w = w_1$; pendant ce temps, x décrit une courbe $q_1 q_2$ joignant le point q_1 au point

$$q_2 = q_1 e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}.$$

A partir de q_2 considérons dans le plan des x le rayon $q_2 O$, transformé du rayon $q_1 O$ par le changement de variable $x' = x e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}$, et suivons w sur ce chemin. Étant donné que $w(q_1)$ est égal à $w(q_2)$, il résulte de l'égalité (3) que w a des valeurs égales en

Fig. 2.



un point quelconque du rayon $q_1 O$ et au point correspondant du rayon transformé $q_2 O$. Nous aurons donc, en appelant x' un point quelconque de $q_2 O$,

$$\lim_{x'=0} x' w(x') = e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}} \lim_{x=0} x\, w(x) = e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}} C^{-1}.$$

Conclusion : Lorsque x décrit le chemin fermé $O q_1 q_2 O$, la détermination C^{-1} de z à l'origine se permute avec la détermination $C^{-1} e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}$. Or il n'y a qu'un point critique, x_0, dans l'angle

$q_1 O q_2$: car, lorsque x se meut dans cet angle à partir d'un point critique, il n'est pas possible que, w repasse une seconde fois par la valeur critique O après avoir tourné autour de w_1 ou w_2. Nous devons donc conclure que, si nous décrivons à partir de l'origine un lacet élémentaire l autour de x_0 (*fig.* 2), ce lacet permute les deux déterminations C^{-1} et $C^{-1}e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}$.

On vérifierait de même qu'un lacet décrit autour du point $x_1 = x_0 e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}$ permute les deux déterminations $C^{-1}e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}$ et $C^{-1}e^{\frac{4i\pi}{\lambda_1}}$, etc. Le mécanisme des permutations opérées autour des points x_i nous est ainsi entièrement connu.

Dans le cas le plus général, le point singulier transcendant X sera à la fois directement critique et point-limite d'un ensemble de points critiques algébriques; X pourra être alors indirectement en même temps que directement critique. Toutefois, il n'y aura lieu de le regarder comme indirectement critique qu'au cas où une infinité de déterminations se permutent effectivement entre elles lorsqu'on tourne autour des points critiques qui convergent vers X, *sans tourner autour du point* X *proprement dit.* Or, il n'en est pas toujours ainsi, comme nous l'allons vérifier en nous arrêtant de nouveau sur un exemple.

Reprenons l'équation (2), dont l'intégrale générale a été mise sous la forme

$$(3) \qquad z = wx, \qquad Cx = \frac{1}{w - w_2}\left(\frac{w - w_1}{w - w_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}},$$

et supposons que $\frac{1}{\lambda_1}$ soit un nombre complexe *quelconque* ayant une partie réelle *positive, comprise par exemple entre* 1 *et* 2.

D'après l'égalité (3) l'intégrale z de l'équation (2) prend à l'origine une double série de valeurs :

1° Les valeurs

$$\ldots, \quad C^{-1}e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_1}}, \quad C^{-1}, \quad C^{-1}e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}, \quad \ldots;$$

les branches d'intégrales correspondant à ces valeurs sont toutes holomorphes à l'origine.

2° Un ensemble de valeurs nulles (pour lesquelles $w = w_1$); les déterminations correspondantes se permutent entre elles autour de l'origine, qui est, par suite, un point transcendant directement critique.

L'intégrale z admet d'autre part un ensemble de points critiques algébriques, qui sont, comme plus haut, les points x_0, x_1, ... définis par l'égalité (4).

Parmi les points critiques, il en est nécessairement qui permutent les déterminations nulles à l'origine avec les déterminations non nulles. Nous appellerons x_0 l'un d'eux. Si nous suivons alors le rayon $x_0 O$ en quittant x_0 avec l'une ou l'autre des deux déterminations nulles qui se confondent en ce point, nous obtiendrons deux caractéristiques ([1]), dont l'une nulle à l'origine, l'autre non nulle et égale à une quantité que nous appellerons C^{-1}.

Considérons maintenant le rayon Ox_1 transformé du rayon Ox_0 par le changement de variable $x' = xe^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}$. Si en deux points correspondants de Ox_1 et Ox_0 la fonction w prend des valeurs égales, elle aura la même valeur pour tout couple de points correspondants de ces rayons. Suivons alors le long de $x_1 O$ les deux caractéristiques qui s'annulent au point critique x_1. De ces deux caractéristiques, l'une est nulle à l'origine, l'autre tend vers une valeur telle que

$$\lim_{x=0} x\, w(x') = C^{-1};$$

et, par suite,

$$z(0) = \lim_{x'=0} x'\, w(x') = C^{-1} e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}},$$

On raisonnera de même sur x_2, x_3, ... et l'on arrivera aux conclusions suivantes :

Quand, à partir de l'origine, on décrit, autour des points x_0, x_1, x_2, ... des lacets tels que l (*fig.* 2), le point x_0 permute une détermination nulle avec la détermination C^{-1} ; le point x_1 permute

---

([1]) Je rappelle que j'entends par *caractéristique* une branche d'intégrale suivie le long d'un chemin rectiligne à partir d'une valeur initiale donnée.

les déterminations o, $C^{-1}e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}$; d'une manière générale, le point x_j permute les déterminations o et $C^{-1}e^{\frac{2ji\pi}{\lambda_1}}$.

Pour mieux comprendre le mécanisme des permutations, joignons l'origine à un point $\bar{x}$ par un chemin invariable ne passant par aucun point critique, et considérons en $\bar{x}$ les déterminations de z qui correspondent aux déterminations que nous venons d'étudier à l'origine. Nous surmonterons d'une barre les déterminations de $z(\bar{x})$ qui s'annulent à l'origine, de deux barres celles qui ne s'y annulent pas. Ainsi x_0 permutera $\bar{z}_0$ avec $\bar{\bar{z}}_0$, x_1 permutera $\bar{z}_1$ avec $\bar{\bar{z}}_1$. Je dis que, si la partie réelle $\mathcal{R}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)$ est comprise entre 1 et 2, les deux déterminations $\bar{z}_0(\bar{x})$, $\bar{z}_1(\bar{x})$ sont différentes. En effet, prenons $\bar{x}$ sur le rayon Ox_0. D'après ce que nous savons des caractéristiques suivies le long des rayons Ox_0, Ox_1, on aura

$$\bar{z}_1\left(\bar{x}e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}\right) = e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}\bar{z}_0(\bar{x}).$$

Partons alors de $\bar{x}$ avec la détermination $\bar{z}_0(\bar{x})$, parcourons le contour du cercle de centre O et de rayon $|\bar{x}|$. Pour que nous arrivions au point $\bar{x}e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}$ avec la détermination $\bar{z}_1$, il faut que la variable $w\left(=\frac{z}{x}\right)$ ait décrit, dans son plan, un tour complet de w_1; il faut par suite $\left[\text{d'après l'égalité (3) et étant donnée la valeur de } \mathcal{R}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)\right]$ que x ait décrit autour de l'origine un arc égal à $2\pi + \text{arc}\,\widehat{x_0x_1}$. Il en résulte que les déterminations $\bar{z}_0(\bar{x})$ et $\bar{z}_1(\bar{x})$ sont différentes et se permutent entre elles lorsque x tourne une fois autour de l'origine. En résumé, les déterminations de l'intégrale z au point $\bar{x}$ seront données par le Tableau suivant:

$$\begin{array}{cccccc} \ldots, & \bar{z}_{-1}, & \bar{z}_0, & \bar{z}_1, & \bar{z}_2, & \ldots, \\ \ldots, & x_{-1}, & x_0, & x_1, & x_2, & \ldots, \\ \ldots, & \bar{\bar{z}}_{-1}, & \bar{\bar{z}}_0, & \bar{\bar{z}}_1, & \bar{\bar{z}}_2, & \ldots. \end{array}$$

La première ligne contient les déterminations qui s'annulent pour

$\bar{x} = 0$ et se permutent autour de l'origine; la dernière ligne contient les déterminations qui ne s'annulent pas pour $\bar{x} = 0$; de plus, chaque détermination $\bar{\bar{z}}_j$ se permute avec la détermination correspondante $\bar{z}_j$ autour du point critique x_j inscrit au-dessus d'elle dans la seconde ligne.

Tandis que les déterminations $\bar{z}_j$ se permutent directement entre elles, on ne peut permuter une détermination $\bar{\bar{z}}_j$ avec une détermination $\bar{\bar{z}}_k$ qu'en remontant de $\bar{\bar{z}}_j$ à $\bar{z}_j$, tournant autour de l'origine et redescendant de $\bar{z}_k$ à $\bar{\bar{z}}_k$. En d'autres termes, pour engendrer une infinité de déterminations de z, on doit tourner une infinité de fois autour de l'origine proprement dite; si, à un moment donné, on tourne autour de x_j (le long d'un lacet l), on est acculé à une impasse : on ne peut obtenir des déterminations nouvelles qu'à condition de revenir sur ses pas en tournant une seconde fois autour de x_j. Pour cette raison, nous ne devons pas regarder l'origine comme un point transcendant indirectement critique.

J'ai supposé (pour me placer dans le cas où le mécanisme des permutations de l'intégrale z se laisse le plus simplement figurer) que la partie réelle de $\frac{1}{\lambda}$ était comprise entre 1 et 2. Si cette partie réelle était comprise entre 0 et 1, plusieurs déterminations $\bar{\bar{z}}_j$ correspondraient à une même détermination $\bar{\bar{z}}_j$; si elle était supérieure à 2, plusieurs déterminations $\bar{z}_j$ correspondraient à une même détermination $\bar{\bar{z}}_j$; mais, dans un cas comme dans l'autre, on ne pourrait obtenir une infinité de déterminations nouvelles qu'en tournant une infinité de fois autour de l'origine.

II. — *L'ordre de succession des permutations. Premiers exemples.*

Comment poursuivre l'étude des points critiques transcendants? Nous inspirant des remarques faites au Chapitre I (§ IV), nous allons porter notre attention sur les deux ensembles dont la nature caractérise une fonction multiforme au voisinage d'une singularité transcendante X : ensemble des points critiques x_1, x_2, ... con-

vergeant vers X; ensemble des déterminations $y_1, y_2, \ldots$ engendrées au voisinage de X.

De ces ensembles nous ne savons rien jusqu'ici, sinon qu'ils sont dénombrables (p. 31). A part cela, il est probable qu'ils sont quelconques. Mais sans doute il existe certains cas privilégiés où ils se simplifient. Peut-être pourrions-nous rechercher ces cas et les classer d'après leur plus ou moins grande complexité.

Si nous considérons les déterminations $y_1, y_2, \ldots$, nous remarquons qu'il y a en général entre elles un *ordre de succession*. Supposons, en effet, que nous partions d'un point $\bar{x}$ avec la détermination $\bar{y}_1$ et que nous décrivions une série de lacets élémentaires autour de X ou de points convergeant vers X (p. 67). Pour passer de la détermination $\bar{y}_1$ à une détermination quelconque $\bar{y}_i$, il ne suffit pas en général de décrire un seul lacet élémentaire : il faut en décrire plusieurs, permutant d'abord $\bar{y}_1$ avec $\bar{y}_{j_1}$, puis $\bar{y}_{j_1}$ avec $\bar{y}_{j_2}$, et ainsi de suite jusqu'à $\bar{y}_i$. Ainsi, les déterminations $\bar{y}_{j_1}, \bar{y}_{j_2}, \ldots$ se trouvent rangées dans un ordre déterminé.

C'est ce qui ressort clairement des exemples donnés au paragraphe précédent. Reportons-nous à l'intégrale générale

$$(3) \qquad z = wx, \qquad Cx = \frac{1}{w - w_2}\left(\frac{w - w_1}{w - w_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}},$$

dans l'hypothèse où λ_1 est un nombre complexe à partie réelle négative. D'après ce que nous avons vu, les déterminations de z sont à l'origine

$$\ldots, \qquad z_0(0) = C^{-1}, \qquad z_1(0) = C^{-1} e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}, \qquad \ldots,$$

et on les déduit les unes des autres en tournant successivement autour des points critiques appelés $x_1, x_2, \ldots$. Ainsi, les déterminations de l'intégrale z jouissent de cette propriété remarquable qu'on peut les ranger suivant une *série unilinéaire* (en les affectant respectivement des indices 0, 1, 2, ...) dans l'ordre même où elles se permutent entre elles.

Analysons d'un peu plus près cette propriété en la présentant sous une forme différente.

Par chacun des points critiques x_j, menons une coupure rectiligne, qui sera par exemple le prolongement du rayon Ox_j, limité par le point x_j et par l'infini. Nous appellerons cette coupure *coupure* x_j. Tourner autour d'un point critique équivaut à franchir la coupure correspondante. Plus précisément, décrivons à partir de l'origine un lacet fermé traversant une seule fois la coupure x_j et ne rencontrant aucune autre coupure (*cf.* p. 31) : ce lacet permute les déterminations $z_j(0)$ et $z_{j+1}(0)$, et il ne permute aucun autre couple de déterminations. Nous appellerons *lacet* x_j tout lacet ainsi défini, et *permutation* x_j la permutation correspondante. Il résulte de ce qui précède qu'une détermination quelconque z_j ne sera permutée avec d'autres que par deux lacets, le lacet x_{j-1} et le lacet x_j. Grâce à cette circonstance, nous allons pouvoir rendre la fonction z uniforme en la représentant sur une surface de Riemann, dont la structure est particulièrement simple.

Considérons une suite dénombrable de feuillets plans superposés ..., $\mathfrak{F}_{-1}$, $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$, ..., ces feuillets étant affectés des indices ..., -1, 0, 1, ... dans l'ordre même où ils se succèdent. Puis relions chaque feuillet avec le précédent par une ligne de croisement placée entre $\mathfrak{F}_{j-1}$ et $\mathfrak{F}_j$ suivant la coupure x_{j-1}, entre $\mathfrak{F}_j$ et $\mathfrak{F}_{j+1}$ suivant la coupure x_j. Nous formons ainsi une surface de Riemann S : je dis que z est uniforme sur cette surface.

Considérons, en effet, sur le feuillet $\mathfrak{F}_j$ la détermination z_j qui est égale à $C^{-1}e^{\frac{2ji\pi}{\lambda_1}}$ à l'origine. Nous avons vu que cette détermination ne pouvait être altérée que par deux permutations, les permutations x_{j-1} et x_j. Dès lors, quand x se meut librement dans le feuillet $\mathfrak{F}_j$ sans franchir les deux lignes de croisement situées dans ce feuillet, z_j reste uniforme. Si l'on franchit la coupure x_j, on passe dans le feuillet $\mathfrak{F}_{j+1}$, et z_j devient z_{j+1}. Comme on a raisonné sur z_j, on raisonnera sur z_{j+1}, et ainsi de suite.

Ainsi, la singularité présentée à l'origine par l'intégrale (3) est caractérisée par ce fait que *z est uniforme sur une surface de Riemann* S *sur laquelle il n'y a pas de fentes* (*coupures infranchissables*) *et dont chaque feuillet est relié au précédent suivant une ligne de croisement passant par un point critique unique.* Il y a correspondance univoque et réciproque, d'une part entre les feuillets de la surface et les déterminations de la

fonction, d'autre part entre les lignes de croisement et les points critiques.

Nous avons supposé tout à l'heure que l'exposant $\frac{1}{\lambda_1}$ de l'égalité (3) avait une partie réelle négative. Lorsque la partie réelle de $\frac{1}{\lambda_1}$ est positive (comprise par exemple entre 1 et 2), z admet au voisinage de $x = 0$ une double série de déterminations, ainsi qu'il a été expliqué à la page 72. Les déterminations de la première série, supposées écrites dans l'ordre où elles se déduisent les unes des autres autour de l'origine, forment une série *unilinéaire*. Traçons alors une coupure suivant un rayon mené de l'origine à l'infini et ne passant par aucun des points critiques x_j de z; puis construisons une surface de Riemann S_1 formée de feuillets superposés $\mathcal{F}_j$, reliés entre eux suivant la coupure considérée : il résulte du Tableau de la page 72 que le feuillet $\mathcal{F}_j$ contient un point critique unique, x_j, de z, et que z *est sur la surface* S_1 *une fonction à deux branches*. En d'autres termes, en tout point de la surface S_1, z a au plus deux déterminations, une de la première série et une de la seconde.

Il est assez naturel de se demander s'il existe des types généraux de fonctions présentant les caractères que nous venons d'analyser, ou des caractères analogues plus ou moins complexes. Peut-être trouverait-on dans cet ordre d'idées un principe de classification des points critiques transcendants présentés par les fonctions multiformes. Mais, avant d'aborder l'étude des cas généraux, il conviendra de préciser davantage les indications fournies par la considération des cas particuliers les plus simples.

Faisons d'abord quelques remarques complémentaires sur l'intégrale (3) dans le cas où la partie réelle de λ_1 est négative. Au lieu de définir z comme fonction uniforme d'un point variable sur une surface de Riemann S, nous pourrions nous proposer d'exprimer les deux variables x et z en fonction uniforme d'un même paramètre t. La question revient à établir une correspondance univoque et réciproque entre les points de la surface de Riemann S et les points du plan d'une variable t. Le plan t se trouvera alors divisé en une série de régions distinctes R_1, R_2, ... correspondant

aux feuillets $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, ... de la surface S, en sorte qu'à une valeur quelconque de t il correspondra une valeur unique de z.

Je dis que nous réaliserons une telle correspondance en posant

$$(5)\quad C'x = \lambda_1 e^{\frac{2+\lambda_1}{\lambda_1}it}\cos t - i(2+\lambda_1)\, e^{\frac{2+\lambda_1}{\lambda_1}it}\sin t \qquad (C' = \text{const.}),$$

d'où résulte

$$C'\frac{dx}{dt} = \frac{2(2+\lambda_1)}{\lambda_1} e^{\frac{2+\lambda_1}{\lambda_1}it}\sin t.$$

En effet, d'après cette dernière égalité, $\frac{dx}{dt}$ s'annule lorsque $t = k\pi$ (k entier). Les valeurs correspondantes de $C'x$ sont, lorsque k est pair ($k = 2k'$),

$$C'x = \lambda_1 e^{\frac{4k'i\pi}{\lambda_1}+2k'i\pi} = \lambda_1 e^{\frac{2ki\pi}{\lambda_1}};$$

lorsque k est impair ($k = 2k'+1$),

$$C'x = -\lambda_1 e^{(2k'+1)i\pi\left(\frac{2}{\lambda_1}+1\right)} = \lambda_1 e^{\frac{2ki\pi}{\lambda_1}}.$$

Choisissons C' de manière que $\frac{\lambda_1}{C'} = x_0$, x_0 étant le point critique de z défini page 68 : la fonction t de x admettra comme points critiques (à distance finie) les points $x_k = x_0 e^{\frac{2ki\pi}{\lambda_1}}$, c'est-à-dire les points critiques mêmes de l'intégrale z.

Considérons alors le long de la coupure x_k les deux déterminations de t qui se permutent autour de x_k. Lorsque x décrit la coupure x_k, chacune de ces déterminations décrit (dans le plan t) une ligne continue allant du point $t = k\pi$ à l'infini; l'ensemble des deux lignes ainsi définies forme une courbe d'un seul tenant, L_k, qui partage le plan des t en deux régions. D'ailleurs, les courbes L_j, L_k, correspondant à deux coupures différentes x_j, x_k, ne sauraient se couper, puisque x est fonction uniforme de t et que les coupures x_j, x_k ne se rencontrent pas; d'ailleurs, L_{j-1} et L_{j+1} sont de part et d'autre de L_j. Dès lors, les différentes courbes L_k partagent le plan des t en un ensemble de régions R_k qui correspondent point par point aux feuillets de S. On en conclut que l'intégrale z est une fonction uniforme de t.

C'est là un nouveau trait distinctif de la singularité présentée à

l'origine par l'intégrale (3) : *on peut exprimer x et z en fonction d'un paramètre t, $x(t)$ étant la fonction définie par l'égalité* (5) *et $z(t)$ étant uniforme.*

Les diverses représentations de z que nous venons d'étudier sont valables pour toute valeur de x et non pas seulement au voisinage de l'origine. Ces représentations caractérisent donc la singularité $x = \infty$ de z en même temps que la singularité $x = 0$. Voyons comment se présenterait la singularité $x = \infty$, si on la ramenait à l'origine par le changement de variable $x = \xi^{-1}$.

Tandis que les points critiques $x_1, x_2, \ldots$ de z convergent vers $x = 0$, nous avons vu que les points critiques appelés x_{-1}, $x_{-2}, \ldots$ s'éloignent vers l'infini. Posons alors $x_{-k} = \xi_k^{-1}$. La fonction $z(\xi)$ admet une infinité de points critiques $\xi_1, \xi_2, \ldots$ qui convergent vers $\xi = 0$, et, autour de ces points, dans l'ordre où ils sont écrits, se permutent les déterminations $z_{-1}, \ldots, z_{-k}, \ldots$ de z. Tout se passe jusqu'ici comme pour la singularité $x = 0$ étudiée plus haut. Mais (c'est là ce qui est nouveau) l'origine est pour $z(\xi)$ point transcendant directement critique en même temps que point transcendant indirectement critique. Reportons-nous, en effet, à la page 69, figure 2. Partons du point q_1 avec la détermination $\overline{w}$ de $\frac{z}{x}$, qui est supposée tendre vers w_1 lorsque q_1 s'éloigne indéfiniment sur le rayon Oq_1, et parcourons dans un sens convenable le contour du cercle de centre O et de rayon Oq_1 : nous nous trouvons tourner successivement autour des points critiques x_{-1}, x_{-2}, etc. Donc, après chaque tour, nous revenons en q_1 avec une nouvelle détermination de z. On en conclut que z a une infinité de déterminations qui s'échangent entre elles (¹) autour du point $\xi = 0$, déterminations qui appartiennent d'ailleurs à l'ensemble des déterminations z_{-k} déjà obtenues en tournant autour des seuls points critiques algébriques ξ_k, *sans tourner autour de* $\xi = 0$. D'où cette conclusion : la singularité $\xi = 0$ de $z(\xi)$ se distingue de la singularité $x = \xi^{-1} = 0$ par ce caractère qu'*il existe au voisinage*

(¹) Le même raisonnement prouverait que $\xi = 0$ permute une infinité de déterminations de z, égales à $\lim_{\xi=0} w_i \xi$ pour $\xi = 0$.

de $\xi = 0$ *plusieurs combinaisons différentes de permutations élémentaires* (permutations opérées par des lacets élémentaires) *qui échangent entre elles les mêmes déterminations.*

La même particularité se rencontrera chez de nombreuses fonctions. Considérons, par exemple, la fonction y de x définie par l'égalité

$$x = \sin y + \mu y \qquad (\mu \neq \pm 1).$$

Cette fonction admet comme points critiques algébriques situés à distance finie les points x pour lesquels $\cos v + \mu$ s'annule, savoir les points

$$\ldots, \quad x_{-1} = x_1 - 2\pi, \quad x_0, \quad x_1 = 2\pi - x_0,$$
$$x_2 = x_0 + 2\pi, \quad x_3 = x_1 + 2\pi, \quad \ldots.$$

Or, ces points x_j convergent vers l'infini qui est, dès lors, pour y point transcendant indirectement critique. De plus, les déterminations $y_1, y_2, \ldots$ de y se rangent suivant une série unilinéaire, et on les déduit les unes des autres en tournant autour des points critiques $x_1, x_2, \ldots$ dans l'ordre où ils sont écrits. Dès lors, en raisonnant exactement comme on l'a fait pour l'intégrale (3), on obtiendra une surface de Riemann (présentant les particularités énumérées page 75) sur laquelle y sera uniforme. Si ensuite on fait le changement de variable $x = \xi^{-1}$, on constatera que, pour la fonction $y(\xi)$, l'origine est un point transcendant directement critique permutant une infinité de déterminations, lesquelles appartiennent d'ailleurs à l'ensemble des y_j déjà défini par les permutations x_j.

III. — *L'équation* $[\mu + p'(y)]\frac{dy}{dx} = 1$.

Nous allons encore examiner quelques exemples simples de singularités transcendantes, cherchant toujours à mettre en lumière les caractères qui peuvent servir de fondement à une classification de ces singularités. Voyons d'abord ce qu'il adviendrait du dernier exemple étudié si l'on y remplaçait la fonction trigonométrique $\sin y$ par une fonction elliptique.

Considérons, en premier lieu, la fonction

$$u = \text{arg}.\wp(x) = \int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

inverse de la fonction $\wp$ de Weierstrass. Supposons que, partant de l'origine avec une détermination $\overline{u}_0$, nous décrivions des lacets élémentaires autour des trois points critiques a, b, c : il est clair que la détermination $u_0(0)$ sera permutée par ces lacets avec trois déterminations différentes $\overline{u}_0^{(1)}$, $\overline{u}_0^{(2)}$, $\overline{u}_0^{(3)}$. Dès lors, les déterminations de u, supposées écrites dans l'ordre où on les déduit les unes des autres, ne paraissent plus se ranger suivant une série unilinéaire. En effet, si dans le cas de l'intégrale (3) nous obtenions une telle série, c'est parce qu'alors une détermination quelconque ne pouvait être permutée directement (j'entends par un seul lacet élémentaire) qu'avec deux autres déterminations, savoir celle qui la précédait et celle qui la suivait dans la série. Cette condition n'étant plus réalisée, il n'est plus possible de construire une surface de Riemann jouissant des propriétés énoncées page 75. Soit, par exemple, S' une surface de Riemann dont les feuillets $\mathfrak{F}_j$ soient reliés deux à deux suivant une ligne de croisement placée entre $\mathfrak{F}_{j-1}$ et $\mathfrak{F}_j$ suivant la coupure a, entre $\mathfrak{F}_j$ et $\mathfrak{F}_{j+1}$ suivant la coupure b, entre $\mathfrak{F}_{j+1}$ et $\mathfrak{F}_{j+2}$ suivant la coupure c, et ainsi de suite. La fonction u n'est pas uniforme sur cette surface S'. Pour la rendre uniforme, il faudrait tracer sur S' une série de coupures que la variable serait assujettie à ne pas franchir : savoir, la coupure c dans le feuillet $\mathfrak{F}_j$, la coupure a dans le feuillet $\mathfrak{F}_{j+1}$, etc.

Les mêmes circonstances se présenteront pour la fonction y définie par l'égalité

$$\mu y + \wp(y) = x + C \qquad (\mu, C = \text{const.}),$$

c'est-à-dire pour l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(6) \qquad [\mu + \wp'(y)]\frac{dy}{dx} = 1.$$

Cette fonction admet comme points critiques algébriques les

points x correspondant aux zéros de $\mu + p'(y)$. Or ces zéros sont des valeurs de y qui convergent vers $y = \infty$. D'autre part, on sait que, dans chaque parallélogramme des périodes, la fonction elliptique $\mu + p'(y)$ admet trois zéros simples et qu'à ces zéros correspondent des valeurs p_1, p_2, p_3 de p qui sont les mêmes quel que soit le parallélogramme considéré [1]. On en conclut que les points critiques correspondant aux zéros de $\frac{dx}{dy}$ convergent vers le point $x = \infty$, qui est dès lors, pour y, point transcendant indirectement critique.

Cela dit, prenons d'abord μ très petit, et suivons, à partir d'une valeur initiale $\overline{y}_0$, les diverses caractéristiques de y (p. 71, note) issues de l'origine. En vertu des théorèmes relatifs à la continuité des intégrales (Chap. I, § V), nous ne pouvons rencontrer sur ces caractéristiques que trois points critiques : le premier a_0 voisin de a, le deuxième b_0 voisin de b, le troisième c_0 voisin de c. Les valeurs prises par y en ces points critiques sont trois zéros de $\mu + p'(y)$ situés dans un même parallélogramme des périodes. D'ailleurs, si nous décrivons des lacets élémentaires autour des points a_0, b_0, c_0, nous revenons à l'origine avec trois déterminations différentes $\overline{y}_0^{(1)}$, $\overline{y}_0^{(2)}$, $\overline{y}_0^{(3)}$, respectivement voisines de $\overline{u}_0^{(1)}$, $\overline{u}_0^{(2)}$, $\overline{u}_0^{(3)}$.

Faisons maintenant varier μ (à partir de $\mu = 0$) *en évitant de passer par les quatre valeurs définies dans la note* 1 *et modifions* $\overline{y}_0$; les points a_0, b_0, c_0 varieront d'une manière continue avec μ et $\overline{y}_0$; de même les valeurs correspondantes de y, ces valeurs étant toujours trois zéros de $\mu + p'(y)$ situés dans un même parallélogramme des périodes. Je dis que a_0, b_0, c_0 sont des fonctions *uniformes* de $\overline{y}_0$, pour toute valeur *fixe* de μ. En effet, si $a_0(\overline{y}_0)$, par exemple, n'était pas uniforme, il devrait exister certaines valeurs de $\overline{y}_0$ pour lesquelles plusieurs déterminations de a_0 viendraient coïncider, pour lesquelles, en d'autres

[1] Au cas où les deux fonctions $\mu + p'(y)$ et $p''(y)$ auraient des zéros communs, la fonction y admettrait des points critiques multiples. Mais aux zéros de p'' correspondent quatre valeurs fixes de p' qui sont les mêmes pour tous les parallélogrammes des périodes. Si donc $(-\mu)$ ne coïncide avec aucune de ces quatre valeurs, on est sûr de n'avoir que des points critiques simples.

termes, y aurait plusieurs points critiques confondus en a_0. Or cette circonstance ne se présente pas, puisque les zéros de $\mu + p'(y)$ situés dans un parallélogramme des périodes sont des zéros simples (*voir* la note, p. 81).

Nous concluons de là que, pour toute valeur donnée (fixe) de μ, les divers points critiques d'une intégrale de l'équation (6) peuvent être répartis entre trois séries : 1° points a_j que l'on déduit de a en faisant varier μ avec continuité; 2° points b_j déduits de b; 3° points c_j déduits de c. Ces trois séries n'interfèrent jamais; si l'on se donne un point critique quelconque d'une intégrale y, on peut toujours dire sans ambiguïté à quelle série il appartient. D'ailleurs, à l'ensemble des caractéristiques issues de l'origine avec une valeur initiale donnée correspondent toujours trois points critiques, un de chaque série. Si nous cherchons alors à représenter y sur une surface de Riemann, nous nous heurtons aux difficultés rencontrées pour la fonction $\arg. p(x)$.

Ces circonstances différencient nettement les intégrales y des fonctions que nous avions précédemment considérées. Nous constatons que nous avons affaire à un mécanisme de permutations plus compliqué que tout à l'heure. Il se trouve cependant qu'une circonstance, spéciale aux intégrales y, permet de rapprocher ces intégrales des exemples étudiés aux pages 78-79.

Nous savons que la fonction $u = \arg. p(x)$ est à l'infini fonction méromorphe de $\sqrt{x}$. Il en est de même des intégrales y. En effet, lorsque μ est arbitrairement voisin de o et que x tend vers l'infini en ligne droite, y tend nécessairement vers un pôle de la fonction elliptique $p(y)$, c'est-à-dire vers une valeur η indépendante de μ. Par continuité, on vérifiera de proche en proche qu'il en est ainsi quel que soit μ. D'ailleurs on a, pour y voisin de η,

$$p(y) = \frac{1}{(y-\eta)^2} + c_1(y-\eta) + c_2(y-\eta)^2 + \ldots;$$

d'où il résulte que $y - \eta$ est développable par rapport aux puissances entières de $\sqrt{x}$.

Ainsi, lorsque x tourne deux fois autour du point $x = \infty$, y ne change pas. Mais on voit sans peine que tourner deux fois autour de $x = \infty$ revient à décrire six lacets fermés autour de points

critiques appartenant alternativement à la première, à la deuxième et à la troisième série. Dès lors, ici comme dans l'exemple de la page 78, *deux mêmes déterminations peuvent être échangées par plusieurs combinaisons différentes de permutations*. Par exemple, on obtient le même résultat en opérant successivement deux permutations des séries a, c ou quatre permutations des séries b, c, a, b. Nous exprimerons ce fait par l'égalité symbolique [1]

$$(a, c) = (b, c, a, b).$$

Soit alors $\overline{y}_j$ une détermination quelconque à l'origine. Nous désignerons par le symbole (ω) la quantité dont s'accroît $\overline{y}_j$ lorsque l'on opère, à partir de $\overline{y}_j$, les permutations (a, b), et par le symbole $-(\omega)$ la quantité dont s'accroît $\overline{y}_j$ lorsque l'on opère les permutations (b, a). De même, (ω') exprimera le résultat des permutations (b, c) et $-(\omega')$ le résultat des permutations (c, b). Il est clair que l'on a les relations

$$(7) \qquad \big((\omega), -(\omega)\big) = 0, \qquad \big((\omega'), -(\omega')\big) = 0.$$

Je dis de plus que

$$(8) \qquad \big((\omega), (\omega')\big) = \big((\omega'), (\omega)\big).$$

En effet, cette relation équivaut à

$$(a, b, b, c) = (b, c, a, b) \quad \text{ou} \quad (a, c) = (b, c, a, b),$$

égalité que nous avons reconnue être vraie.

Cela dit, supposons qu'à partir d'une valeur initiale $\overline{y}_0$ nous opérions un nombre pair (quelconque) de permutations. Nous ajouterons ainsi à $\overline{y}_0$ un certain nombre de quantités (ω), $-(\omega)$, (ω') ou $-(\omega')$. En vertu des relations (7) et (8), l'accroissement de y pourra toujours être mis sous la forme

$$\pm [(\omega), (\omega), \ldots, (\omega)] \pm [(\omega'), \ldots, (\omega')],$$

ce que nous écrirons

$$m_*(\omega) + n_*(\omega'),$$

---

(1) On a, d'une manière générale, l'égalité symbolique

$$(a, b, c, a, b, c) = 0.$$

m et n étant des entiers positifs ou négatifs. Nous appellerons (ω) et (ω') les *périodes* de l'intégrale y. D'après la relation (8), les deux périodes sont commutables. Elles se distinguent des périodes d'une fonction elliptique en ce qu'elles n'ont pas une valeur fixe, mais varient avec la valeur initiale $\overline{y}_j$ à laquelle on les ajoute. En revanche, d'après ce que nous avons dit plus haut, ces périodes ne se confondent jamais entre elles. Étant donnée une valeur initiale quelconque, on pourra toujours dire, sans ambiguïté, quelles sont les périodes (ω), (ω'), $-(\omega)$, $-(\omega')$ qui lui correspondent.

Ces remarques faites, il sera facile d'obtenir à l'origine l'ensemble total des déterminations de l'intégrale y. Appelons $\overline{y}_0$ une détermination initiale et $\overline{\overline{y}}_0$ la détermination qui s'en déduit par une permutation unique opérée, par exemple, autour d'un point critique de la série a. Toutes les déterminations à l'origine seront données par les deux formules symboliques

$$\overline{y}_{m,n} = \overline{y}_0 + m_*(\omega) + n_*(\omega'),$$
$$\overline{\overline{y}}_{m,n} = \overline{\overline{y}}_0 + m_*(\omega) + n_*(\omega'),$$

m et n étant des entiers quelconques, positifs ou négatifs.

Les déterminations $\overline{y}_{m,n}$ et $\overline{\overline{y}}_{m,n}$ sont ici figurées suivant deux Tableaux à double entrée. Mais elles se disposeront tout naturellement en série unilinéaire si l'on pose, par exemple,

$$\overline{y}_{(0)} = \overline{y}_0, \quad \overline{y}_{(1)} = \overline{\overline{y}}_0, \quad \overline{y}_{(2)} = \overline{y}_0 + (\omega), \quad \overline{y}_{(3)} = \overline{\overline{y}}_0 + (\omega'), \quad \dots;$$

$\overline{y}_{(1)}$ se déduit alors de $\overline{y}_{(0)}$ par une permutation a, $\overline{y}_{(2)}$ se déduit de $\overline{y}_{(1)}$ par une permutation b, $\overline{y}_{(3)}$ de $\overline{y}_{(2)}$ par une permutation c, etc. Si nous affectons les points critiques des indices 1, 2, ... dans l'ordre où nous les rencontrons, nous obtenons une série de points x_1, x_2, ... qui correspondent aux y_j exactement comme il arrivait dans le cas de l'intégrale (3) (p. 74). Seulement, les deux déterminations $\overline{y}_j, \overline{y}_{j+1}$ qu'échange la permutation x_j auraient pu également être échangées par d'autres permutations.

On voit par là combien l'existence d'une relation, telle que $(a, b, c, a, b, c) = 0$, simplifie le mécanisme des permutations d'une intégrale y au voisinage de la singularité transcendante $x = \infty$. Qu'arriverait-il, en effet, si les périodes (ω), (ω') n'étaient

pas commutables? Pour échanger, par exemple, $\overline{y}_{(0)} + n_*(\omega')$ avec $\overline{y}_{(0)} + m_*(\omega)$ par une série de permutations élémentaires, on serait obligé de repasser par $\overline{y}_{(0)}$. Alors, comme nous le disions plus haut, il ne serait plus possible de ranger l'ensemble total des déterminations en une série unilinéaire où deux déterminations consécutives seraient permutées par un lacet élémentaire; ou bien, si l'on formait une telle série, une même détermination devrait y figurer une infinité de fois. En ce cas, la succession des permutations serait comparable à un arbre dont les branches se ramifieraient à l'infini; si un insecte voulait parcourir tout le bois de cet arbre, il devrait continuellement rétrograder vers les nœuds pour repartir sur les branches où il ne serait pas engagé au premier passage.

IV. — *L'équation* $zz' = z + 1$.

Considérons l'équation

$$zz' = z + 1. \tag{9}$$

Cette équation, qu'on intègre immédiatement, a pour intégrale générale

$$z - \log(z + 1) = x - x_0 \qquad (x_0 = \text{const. arbitraire}). \tag{10}$$

Nous allons nous demander par quel mécanisme les diverses branches de cette intégrale se déduisent les unes des autres.

Soient $\overline{x}$ un point très éloigné sur l'axe réel négatif et $\overline{x}_1$ un point très éloigné sur l'axe réel positif. Lorsque $\overline{x}$ tend vers $-\infty$, $|z(\overline{x})|$ augmente indéfiniment comme $|\overline{x}|$. Au contraire, lorsque $\overline{x}_1$ tend vers $+\infty$, $z(\overline{x}_1)$ peut, soit croître indéfiniment, soit tendre vers -1.

L'intégrale (10) admet comme points critiques les points où z s'annule, c'est-à-dire les points

$$\ldots, \qquad x_{-1} = x_0 - 2i\pi, \qquad x_0, \qquad x_1 = x_0 + 2i\pi, \qquad \ldots.$$

Ces points sont tous situés sur une même droite D perpendiculaire à l'axe réel.

[illegible]

Si, au lieu de considérer le chemin l_1, on avait considéré le chemin l_{-1} transformé de l_0 par le changement de variable $x' = x - 2i\pi$, on aurait constaté de la même manière que x_{-1} permute $\bar{z}_0$ avec une détermination $\bar{z}_{-1}$. En poursuivant notre raisonnement, nous arrivons donc au résultat suivant : l'intégrale (10) admet en $\bar{x}$ une série unilinéaire de déterminations $\ldots, \bar{z}_{-1}, \bar{z}_0, \bar{z}_1, \ldots$ que l'on déduit les unes des autres en tournant autour des points critiques $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ dans l'ordre même où ils sont écrits; *nous retombons ainsi sur le mécanisme décrit à la page 74*. D'ailleurs, une fois ce résultat établi pour $\bar{x}$ très éloigné, on peut évidemment l'appliquer [1] à toute position de $\bar{x}$ située à gauche de la droite D.

Il n'en sera plus de même si nous considérons les déterminations voisines de z en un point situé à droite de la droite D. En effet, nous avons dit qu'en $\bar{x}_1$ z a des déterminations voisines de -1 et des déterminations très grandes en valeur absolue (comparables à $\bar{x}_1$). Il existe donc au moins un point critique qui permute ζ_0 (voisin de -1) avec une détermination η_0 de grand module. Soit x_0 un tel point critique; ζ_0 et η_0 s'échangent alors le long du lacet $L_0(\bar{x}_1 \bar{x} \bar{x}' \bar{x}'_1 \bar{x}_1)$. Nous savons, d'autre part, que la caractéristique issue de $\bar{x}_1$ avec la valeur ζ_0 est encore égale à ζ_0 au point $\bar{x}'_1$; on en conclut, comme tout à l'heure, que le lacet L_1 transformé de L_0 par le changement de variable $x' = x + 2i\pi$ permute encore ζ_0 et η_0; d'ailleurs, la caractéristique égale à η_0 en $\bar{x}'_1$ prend en $\bar{x}_1$ une valeur de grand module η_1 différente de η_0; il en résulte que le chemin fermé $(\bar{x}_1 \bar{x}'_1, L_1, \bar{x}'_1 \bar{x}_1)$ permute ζ_0 avec η_1. En d'autres termes, ζ_0 et η_1 s'échangent autour du point x_1. Le même raisonnement prouvera, d'une manière générale, que le point x_j permute ζ_0 avec une détermination de grand module η_j différente de $\eta_0, \eta_1, \ldots$. D'où cette conclusion :

1° *L'ensemble des caractéristiques issues de* $\bar{x}_1$ *avec la valeur* ζ_0 *présente une infinité de points critiques* $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ *qui permutent respectivement* ζ_0 *avec* $\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots$;

---

[1] On verra sans peine que l'on peut appliquer toutes ces conclusions à l'équation plus générale $zz' = az + b$.

2° *L'ensemble des caractéristiques issues de $\overline{x}_1$ avec la valeur η_0 présente un seul point critique x_0, lequel permute η_0 avec ζ_0.*

Aussi, à l'inverse de ce qui se passait dans tous les exemples considérés plus haut, *il n'y a pas de succession de déterminations au point $\overline{x}_1$*. Une intégrale quelconque de l'équation (10) n'admet en $\overline{x}_1$ qu'une seule détermination ζ_0 tendant vers -1 lorsque $\overline{x}_1$ tend vers $+\infty$, et cette détermination s'échange avec les déterminations η par un ensemble de permutations qui sont *simultanées,* non *successives.*

L'exemple de l'équation (10) nous apprend que la succession des déterminations d'une fonction multiforme peut varier avec les régions où nous nous plaçons. Lorsque nous chercherons à caractériser cette succession, nous devrons donc toujours spécifier où nous l'étudions.

V. — *Premier type de points transcendants de première espèce.*

Nous venons de passer en revue un certain nombre de singularités transcendantes présentant des particularités diverses. Ces particularités sont-elles spéciales aux exemples que nous avons étudiés ou caractérisent-elles, au contraire, certaines catégories générales de points singuliers? Pour nous en rendre compte, nous allons rechercher sous quelles conditions une singularité transcendante appartiendra à tel ou tel des types que nous avons mis en lumière. Nous commencerons par le type le plus simple, celui qui a été décrit aux pages 74-77.

Considérons un point transcendant (isolé) *non directement critique,* mais point-limite de points critiques algébriques. Nous supposerons ce point à l'*origine* et nous appellerons (y) l'ensemble des branches qui se permutent entre elles au voisinage de o, c'est-à-dire dans un certain cercle Γ de centre o. Nous admettrons de plus que chacun des points critiques algébriques contenus dans Γ permute deux déterminations seulement. (S'il n'en était pas ainsi, nous considérerions que plusieurs points cri-

tiques sont confondus et nous affecterions d'indices différents les diverses permutations opérées autour de ces points.)

Par chaque point critique menons une coupure joignant le point au contour de Γ. La coupure sera rectiligne ou curviligne, mais nous supposerons qu'elle ne s'enroule pas une infinité de fois autour de l'origine (*cf.* p. 66, note 1) et qu'aucun de ses points n'est point critique ou point-limite de points critiques. Si la singularité transcendante étudiée est isolée, on pourra construire une infinité de systèmes de coupures satisfaisant à cette condition et, de plus, ne se coupant pas entre elles.

Tourner autour d'un point critique équivaut à franchir la coupure correspondante (*cf.* p. 31). A un point critique x_j correspondent donc (une fois que l'on a adopté un système déterminé de coupures) deux déterminations, et deux seulement : ce sont celles qui se permutent entre elles le long d'un lacet qui contourne x_j sans franchir aucune des coupures relatives aux autres points critiques. Nous appellerons $\overline{y}_{j(1)}$ et $\overline{y}_{j(2)}$ les valeurs de ces déterminations à l'origine en un point fixe $\overline{x}$ lié à l'origine par un chemin invariable (*cf.* p. 72).

Ces préliminaires admis, supposons que L'ON PUISSE DISPOSER DU SYSTÈME DES COUPURES DE MANIÈRE QU'A UNE DÉTERMINATION QUELCONQUE DE L'ENSEMBLE (y) AU POINT $\overline{x}$ IL CORRESPONDE, SUIVANT LES CONVENTIONS ADOPTÉES, DEUX POINTS CRITIQUES DISTINCTS (ET DEUX SEULEMENT) POUVANT PERMUTER CETTE DÉTERMINATION AVEC D'AUTRES. Nous supposons, en d'autres termes, qu'une détermination quelconque devient uniforme dans Γ dès que x est assujetti à ne pas franchir *deux* coupures (et deux seulement).

Partons alors d'une détermination $\overline{y}^{(0)}$ de $y(\overline{x})$ et appelons x_{-1}, x_0 les points critiques qui la permutent. Nous pouvons poser

$$\overline{y}^{(0)} = \overline{y}_{-1(2)} = \overline{y}_{0(1)}.$$

Posons ensuite $\overline{y}^{(1)} = \overline{y}_{0(2)}$: à la détermination $\overline{y}^{(1)}$ correspondra, outre x_0, un point critique que nous appellerons x_1 ; nous poserons alors $\overline{y}^{(1)} = \overline{y}_{1(1)}$, $\overline{y}_{1(2)} = \overline{y}^{(2)}$; et ainsi de suite.

Les déterminations ..., $\overline{y}^{(-1)}$, $\overline{y}^{(0)}$, $\overline{y}^{(1)}$, ... forment une série unilinéaire et on les déduit les unes des autres en tournant autour des points critiques ..., x_{-1}, x_0, x_1, ... dans l'ordre des indices

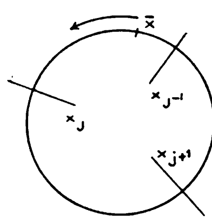
croissants ou décroissants. D'ailleurs (puisqu'il existe par hypothèse une infinité de points critiques convergeant vers l'origine et permutant entre elles une infinité de déterminations) l'une au moins des deux suites $(x_1, x_2, \ldots)$, $(x_{-1}, x_{-2}, \ldots)$ converge vers l'origine. Nous supposerons que ce soit le cas pour la première suite : alors les considérations qui précèdent s'appliquent à des valeurs positives arbitrairement grandes de l'indice j.

Le mécanisme des permutations x_j est donc exactement celui que nous avons décrit page 74. En particulier l'ensemble (y) est uniforme (au voisinage de l'origine) sur une surface de Riemann S construite comme il a été dit page 75. Cette surface ne contient pas de fente, et les feuillets $\mathfrak{F}_j$ et $\mathfrak{F}_{j+1}$ sont reliés par une ligne de croisement unique placée suivant la coupure x_j.

Les coupures x_j sont, avons-nous dit, rectilignes ou curvilignes. Nous allons nous borner au cas le plus simple, et supposer qu'elles sont rectilignes; plus précisément même (afin de nous rapprocher le plus possible de l'exemple du paragraphe II), nous allons admettre que *la coupure x_j est placée suivant le prolongement du rayon ox_j compris entre le point x_j et le contour* Γ.

Lorsque la singularité à l'origine présente ces caractères, on peut obtenir par un procédé très simple toutes les déterminations qui se permutent en son voisinage. Soit c un cercle concentrique à Γ ayant pour rayon ρ. Puisque les points x_j convergent vers l'origine, nous sommes assurés qu'à partir d'une certaine valeur de j,

Fig. 4.



on a $|x_j| < \rho$. Partons alors de l'origine avec la détermination qui correspond à $\bar{y}^{(j)}$, rendons-nous le long d'un rayon en un point du contour de c, puis parcourons ce contour. On voit que si nous décrivons le contour de c dans un sens convenable (*fig.* 4) nous nous trouverons tourner successivement autour des points

x_j, x_{j+2}, ..., points qui permutent la suite des déterminations $\bar{y}^{(j+1)}$, $\bar{y}^{(j+2)}$, ...

D'ailleurs, quelque petit que soit ρ', on a, à partir d'une certaine valeur de k, $|x_{j+k}| < \rho'$. Il en résulte que, pour tourner autour des points x_j, x_{j+1}, ... on peut, au lieu de décrire le contour de c, *suivre une spirale qui s'enroule autour de l'origine et enlace les points* x_j, x_{j+1}, ... *dans ses spires successives. Cette spirale pourra converger d'autant plus rapidement vers l'origine que les points* x_j, x_{j+1}, ... *tendront eux-mêmes plus vite vers* o.

Quel sera, d'une manière précise, l'effet d'un tour effectué le long de c? Plaçons le point $\bar{x}$ (relié à l'origine par un chemin invariable) sur le contour de c; puis, partant de $\bar{x}$ avec $\bar{y}^{(j)}$, décrivons *une fois* le contour de c dans un sens tel que nous franchissions la coupure x_j avant de franchir la coupure x_{j-1} (*fig.* 4). La nouvelle détermination obtenue en $\bar{x}$ sera $\bar{y}^{(j+1)}$ dans le cas où, après avoir franchi la coupure x_j, nous revenons en $\bar{x}$ sans avoir rencontré la coupure x_{j+1}. Dans le cas contraire, la nouvelle détermination sera $\bar{y}^{(j+k)}$ ($k > 0$). Mais *l'entier* k *sera, quel que soit* j, *inférieur à un nombre fixe* m *à moins que la différence des arguments de* x_j, x_{j+k} *ne tende vers* o *lorsque* (1) j *et* k *augmentent indéfiniment*. Nous écarterons ce dernier cas. [S'il se présentait (2), la spirale définie plus haut pourrait se réduire à une courbe qui convergerait vers l'origine sans s'enrouler une infinité de fois autour d'elle.]

Dans ces conditions, nous allons obtenir un utile renseignement relatif à la ou aux branches-limites de l'ensemble des déterminations (y) (*voir* Chap. I, § 4). Supposons (pour pouvoir appliquer le théorème de la page 26) que le cercle Γ ne contienne pas de points-limites d'intersections des branches (y); puis considérons un ensemble partiel de déterminations (y) qui convergent vers une branche-limite Y_1 définie par la valeur $\bar{Y}_1^{(1)}$ qu'elle prend

---

(1) Nous supposons donc que l'angle dont doit tourner le rayon vecteur Ox_j lorsque (se mouvant toujours dans le même sens) il va passer successivement par les points critiques $x_1, \ldots, x_j$, augmente indéfiniment avec j.

(2) C'est ce qui arriverait pour l'exemple du paragraphe IV si l'on faisait le changement de variable $x = \xi^{-1}$.

en un point donné $\bar{x}$. Je dis que *cette branche-limite* Y_1 *est partout méromorphe dans le cercle* Γ, *sauf peut-être à l'origine.*

En effet, joignons (par une droite) le point $\bar{x}$ à un point quelconque x' de Γ. Nous sommes assurés qu'à partir d'une certaine valeur de l'indice k les caractéristiques issues de $\bar{x}$ avec les déterminations $\bar{y}^{(k)}$, $\bar{y}^{(k+1)}$, ... sont toutes méromorphes au voisinage de x'. Il en résulte que Y_1 n'a dans Γ d'autre singularité que peut-être l'origine (qui est alors point directement critique de Y_1).

Il est souvent possible d'aller plus loin et de montrer que *la fonction-limite* Y_1 *est uniforme dans le cercle* Γ. Il en est ainsi en particulier lorsque l'origine est une singularité transcendante de l'espèce qui nous occupe pour l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où f est uniforme au voisinage de $x = 0$, $y = Y$. Nous nous contenterons d'énoncer ce résultat sans démonstration.

Les points transcendants que nous étudions présentent cette particularité que l'ordre de succession des permutations x_j est un ordre déterminé. En d'autres termes, il y a correspondance univoque et réciproque entre un point critique et son conséquent x_{j+1}. Si donc on considère x_{j+1} comme étant une certaine fonction discontinue de x_j (définie pour les valeurs x_1, x_2, ... de x_j), cette fonction est uniforme ainsi que son inverse. D'ailleurs on peut transformer cette fonction discontinue en fonction continue au moyen d'une formule d'interpolation. Plaçons-nous dans le cas particulier où *l'on peut choisir la fonction continue de manière qu'elle soit holomorphe* (¹) *dans un cercle* Γ *ayant pour centre le point transcendant* que nous prendrons comme origine. Cette fonction (si l'on remplace x_j par x) sera de la forme

$$\varphi(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots, \tag{11}$$

(¹) On reconnaîtrait aisément qu'il en est ainsi lorsque l'ensemble des branches (y) est défini par une équation différentielle $y' = f(x, y)$, où f est méromorphe pour x voisin de 0 et y égal aux branches (y).

et l'on aura

$$x_{j+1} = \varphi(x_j), \qquad x_{j+2} = \varphi[\varphi(x_j)], \qquad \ldots.$$

Par hypothèse, les points x_j convergent vers o. Nous supposerons ici plus précisément que, *quel que soit x dans un cercle Γ de centre* o, *la fonction $\varphi[\varphi\ldots[\varphi(x)]\ldots]$ tende uniformément vers* o *lorsque le nombre des φ superposés croît indéfiniment* [1]. Nous appellerons la fonction φ *période des points critiques;* la singularité transcendante que nous étudions est alors *caractérisée par ce fait qu'il lui correspond une période des points critiques unique.*

L'existence d'une période des points critiques permettra d'obtenir simplement une représentation de la fonction $y(x)$, analogue à celle qui a été donnée page 77.

Plaçons-nous (je me bornerai à l'étude de ce cas) dans l'hypothèse où le rapport $\frac{x_{i+1}}{x_i}$ admet une limite non nulle et différente de 1. Cette hypothèse revient à admettre que le coefficient c_1 du développement (11) n'est égal ni à o ni à 1. Nous allons chercher à faire un changement de variable

$$u = \psi(x) = k_1 x + k_2 x^2 + \ldots \tag{12}$$

jouissant de cette propriété que les égalités

$$u_i = \psi(x_i), \qquad u_{i+1} = \psi(x_{i+1})$$

entraînent, pour une valeur quelconque de l'indice i,

$$u_{i+1} = c_1 u_i.$$

Nous aurons

$$c_1 u_i = k_1 c_1 x_i + k_2 c_1 x_i^2 + \ldots$$

et [en remplaçant x_{i+1} par $\varphi(x_i)$]

$$u_{i+1} = k_1(c_1 x_i + c_i^2 + \ldots) + k_2(c_1 x_i + \ldots)^2 + \ldots.$$

---

[1] On pourrait présenter la même hypothèse sous la forme suivante (que l'on démontrerait être équivalente) : posons $\Phi(|x|) = |c_1 x| + |c_2 x^2| + \ldots$; on suppose que la fonction $\Phi[\Phi\ldots[\Phi(|x|)]\ldots]$ tend uniformément vers o lorsque le nombre des Φ superposés croît indéfiniment et que $|x|$ est inférieur à un certain nombre positif r. On voit que, si cette hypothèse est satisfaite pour un certain système de valeurs des $|c|$, elle est sûrement satisfaite pour toutes les valeurs moindres des $|c|$. — Nous ne nous demanderons pas ici s'il existe des points transcendants de l'espèce étudiée ne satisfaisant pas aux diverses conditions posées ci-dessus; la question, toutefois, vaudrait la peine d'être étudiée.

Si nous identifions, dans ces deux égalités, les coefficients des puissances semblables des x_i, nous aurons, pour déterminer les k_i, les égalités suivantes :

$$(13) \qquad \begin{cases} k_2(c_1 - c_1^2) = k_1 c_2, \\ k_3(c_1 - c_1^3) = k_1 c_3 + 2 k_2 c_1 c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Puisque c_1 n'est pas égal à 1, les relations linéaires (13) permettront de déterminer successivement k_2, k_3, ... en fonction de k_1 qui reste arbitraire (non nul). Ainsi, il sera toujours possible de calculer les coefficients de la série (12). Reste à montrer que cette série est absolument convergente au voisinage de $x = 0$.

Pour établir ce point, nous aurons recours à l'artifice suivant. Supposons que les modules des coefficients $c_2, c_3, \ldots$, étant d'abord nuls, croissent à partir de 0 [cela de telle sorte que la fonction $\varphi(x)$ (¹) continue à satisfaire dans Γ aux conditions énoncées page 93]. Lorsque les modules $|c_1|$, $|c_2|$, ... sont très petits, la série (12) converge certainement dans tout cercle Γ_1 intérieur à Γ. Est-il possible que, pour certaines valeurs des c, cette série cesse de converger dans Γ_1 et converge seulement dans un cercle Γ' concentrique et intérieur à Γ_1 ?

Je dis que cela est impossible. Et, en effet, appelant $\bar{x}$ un point quelconque du contour de Γ_1, posons

$$(14) \qquad x' = \varphi(\bar{x}), \qquad x'' = \varphi(x'), \qquad \ldots, \qquad x^{(k)} = \varphi(x^{(k-1)}).$$

D'après l'hypothèse relative à la convergence uniforme de la fonction $\varphi[\varphi \ldots [\varphi(x)] \ldots]$, on peut toujours trouver un entier k tel que le point $x^{(k)}$ correspondant à un point $\bar{x}$ quelconque du contour Γ_1 soit intérieur au cercle Γ'. La fonction $\psi(x^{(k)})$ sera alors holomorphe pour les valeurs considérées des c. Or on aura, par définition,

$$\begin{aligned} \psi(x^{(k-1)}) &= \psi[\text{arg.}\, \varphi(x^{(k)})] = c_1^{-1}\, \psi(x^{(k)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi(x) \quad &= c_1^{-(k-1)}\, \psi(x^{(k)}), \end{aligned}$$

égalités qui ne peuvent évidemment cesser d'être vérifiées lorsque

(¹) *Voir* p. 93, note 1.

les coefficients c varient d'une manière quelconque à partir de o. Il en résulte que, si $\psi(x^{(k)})$ est holomorphe pour certaines valeurs de $x^{(k)}$, $\psi(\bar{x})$ est nécessairement holomorphe pour les valeurs correspondantes de $\bar{x}$. Donc $\psi(x)$ ne cesse pas d'être holomorphe dans le cercle Γ_1 tout entier. C. Q. F. D.

L'existence de la fonction ψ une fois établie, nous sommes certains, puisque $k_1 \neq 0$, que la fonction inverse de ψ est une fonction holomorphe de u au voisinage de $u = 0$. Or, d'après les calculs de la page 77, *nous saurons exprimer les deux variables y et u en fonction uniforme d'un même paramètre t. Le problème se trouvera donc également résolu pour les variables y et x.*

VI. — *Définition générale des points de première espèce.*

Nous avons insisté quelque peu sur le type le plus simple de points transcendants, celui dont nous avions rencontré un cas particulier aux pages 67-73. Il nous sera facile maintenant de passer à des types plus généraux, en nous inspirant des divers exemples étudiés aux paragraphes III et IV.

1° Supposons, d'une manière générale, que l'on puisse ranger l'ensemble des déterminations (y) [qui s'échangent entre elles, par les permutations x_j (1), dans un cercle Γ entourant l'origine] en une série unilinéaire où chaque détermination ne figure qu'une fois ou un nombre fini de fois; supposons, d'autre part, que l'on puisse disposer les coupures définies page 89 de manière qu'à tout couple de deux déterminations consécutives il corresponde une et une seule permutation élémentaire échangeant ces déterminations : nous dirons alors que l'origine est un POINT TRANSCENDANT DE PREMIÈRE ESPÈCE, DE LA PREMIÈRE SORTE ET DU PREMIER TYPE.

---

(1) Si l'origine était un point transcendant directement critique, il y aurait une infinité de points critiques confondus à l'origine. Mais chaque nouveau tour décrit autour de l'origine (échangeant deux déterminations nouvelles) constituerait une nouvelle permutation. Nous considérerions donc qu'autour de l'origine s'opèrent une infinité de permutations, les permutations $\ldots, x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots$.

Dans ces conditions l'ensemble (y) sera uniforme (au voisinage de l'origine) sur une surface de Riemann S, dont chaque feuillet sera relié au précédent suivant une ligne de croisement passant par un point critique unique. Il y aura correspondance univoque et réciproque, d'une part entre les feuillets de la surface et les déterminations de la fonction, d'autre part entre les lignes de croisement et les points critiques.

2° Supposons qu'il existe un ensemble partiel de déterminations $y_1, y_2, \ldots$ (déduites les unes des autres par les permutations x_j) qui jouissent des propriétés énoncées ci-dessus, mais qu'en outre la détermination y_j soit échangée, par un nombre fini de permutations $x_{j,1}, x_{j,2}, \ldots, x_{j,k}$, avec un nombre fini de déterminations nouvelles $y_{j,1}, y_{j,2}, \ldots, y_{j,k}$, qui, de leur côté, ne s'échangent (par permutation élémentaire) qu'avec y_j (les permutations $x_{j,1}, \ldots, x_{j,k}$ constituent alors des impasses, comme il a été dit page 73) : lorsqu'il en est ainsi, nous dirons que l'origine est UN POINT TRANSCENDANT DE PREMIÈRE ESPÈCE, DE LA PREMIÈRE SORTE ET DU SECOND TYPE.

Dans ces conditions, on pourra encore construire la surface de Riemann S; mais sur chacun des feuillets de cette surface (ou sur certains d'entre eux) la fonction (y) pourra acquérir un nombre fini de déterminations. D'ailleurs, du groupe de déterminations représentées dans le feuillet $\mathfrak{F}_j$, on ne pourra passer à d'autres groupes qu'à condition de franchir l'une des deux lignes de croisement qui relient $\mathfrak{F}_j$ aux feuillets $\mathfrak{F}_{j-1}$ ou $\mathfrak{F}_{j+1}$ (*cf.* p. 76).

3° Supposons encore que l'on puisse ranger l'ensemble des déterminations (y) en une série unilinéaire $\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots$, où chaque détermination ne figure qu'une fois (ou un nombre fini de fois), deux déterminations consécutives quelconques étant échangées par une permutation élémentaire unique. A la série des déterminations (y) correspond alors une suite de permutations élémentaires $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$. Mais supposons que dans cette suite ne figurent pas toutes les permutations que l'on peut opérer au voisinage de l'origine. Cela revient à dire [puisque toutes les déterminations (y) figurent dans la suite $\ldots, y_0, y_1, \ldots$] que *deux mêmes déterminations* (y) *peuvent être échangées par plusieurs combinaisons différentes de permutations* (*cf.* p. 78 et suivantes). Lorsqu'il en est ainsi, nous dirons que l'origine est un

POINT TRANSCENDANT DE PREMIÈRE ESPÈCE, DE LA SECONDE SORTE ET DU PREMIER TYPE.

Dans ces conditions, l'ensemble (y) sera uniforme (à l'intérieur du contour entourant l'origine) sur une surface de Riemann S, dont chaque feuillet sera relié au précédent par une ligne de croisement passant par un point critique unique; mais sur chaque feuillet (ou sur certains feuillets) se trouveront des fentes (coupures infranchissables) : ces fentes joindront au contour de Γ les points critiques dont nous ne nous servons pas pour déduire les unes des autres les déterminations $\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots$, en d'autres termes, les points critiques qui ne figurent pas dans la suite $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$. Il y aura correspondance univoque et réciproque entre les feuillets de la surface et les déterminations de la fonction, mais non plus entre les lignes de croisement et les points critiques.

4° Enfin, lorsque l'origine présente à la fois les particularités qui caractérisent les deux derniers cas définis, nous dirons que l'origine est un POINT TRANSCENDANT DE PREMIÈRE ESPÈCE, DE LA SECONDE SORTE ET DU SECOND TYPE.

VII. — *Exemple de point transcendant de seconde espèce.*

Je n'entreprendrai pas de donner ici la définition générale des points transcendants d'espèce supérieure à la première. Je me contenterai de montrer par un exemple qu'il existe effectivement de tels points.

Considérons l'équation différentielle

$$zz' = A_2 z + A_3, \tag{15}$$

où A_2 et A_3 sont des polynomes en x dont les degrés m_2 et m_3 satisfont à l'inégalité $m_3 \geqq 2m_2 + 2$. Grâce aux résultats obtenus au Chapitre II (p. 56-60), il nous sera facile d'étudier le mécanisme des permutations d'une branche d'intégrale de (15) au voisinage de $x = \infty$. A titre d'exemple, nous allons examiner le cas où $m_3 = 2$, d'où résulte $m_2 = 0$. L'équation (15) peut s'écrire en ce cas

$$z = \sqrt{\zeta}, \qquad \zeta' = \sqrt{\zeta} + 3x^2 + \alpha x + \beta \tag{16}$$

[car on peut toujours effectuer un changement de variable de la forme $\zeta = l\zeta'$, $x = l'x'$ rendant les coefficients de ζ et x^2 égaux à 1 et 3].

Nous avons vu (p. 59) que sur l'ensemble des caractéristiques de (16) issues de l'origine avec une valeur initiale très grande $\overline{\zeta}_j$ se trouvent m_2+1 (ici *trois*) points critiques que nous appellerons $x_{a,j}$, $x_{b,j}$, $x_{c,j}$. Ces points sont d'autant plus éloignés que $|\overline{\zeta}_j|$ est plus grand, $x_{b,j}$, $x_{c,j}$ étant alors très voisins des racines (autres que $x_{a,j}$) du polynome $x^3 - x_{a,j}^3$.

Menons par les points critiques d'une intégrale ζ des coupures rectilignes joignant ces points à l'infini. Le système de coupures ainsi construit satisfait aux conditions de la page 89 : mais *à une détermination donnée correspondent*, cette fois (suivant les conventions adoptées p. 89), non plus deux, mais *trois points critiques pouvant permuter cette détermination avec d'autres.* Cette constatation nous suggère l'idée de rapprocher l'intégrale ζ de la fonction

$$\mu y + p(y) = x + C$$

étudiée au paragraphe III de ce Chapitre.

Partant de l'origine avec la détermination $\overline{\zeta}_j$ décrivons un lacet élémentaire autour du point $x_{a,j}$. Nous obtenons une nouvelle détermination $\overline{\zeta}_{j+1}$ à laquelle correspondent trois points critiques, dont l'un est $x_{a,j}$, les deux autres $x_{b,j+1}$, $x_{c,j+1}$ étant respectivement très voisins des racines (autres que $x_{a,j}$) du polynome $x^3 - x_{a,j}^3$. Par conséquent, *lorsqu'on opère la permutation $x_{a,j}$, les points critiques $x_{b,j}$, $x_{c,j}$ subissent des déplacements qui, si l'on a pris $|x_{a,j}|$ assez grand, sont arbitrairement petits par rapport à $|x_{b,j}|$, $|x_{c,j}|$.*

Traçons alors dans le plan des ζ un cercle D de rayon assez grand pour que, lorsque $\overline{\zeta}_j$ est extérieur à D, les points critiques $x_{a,j}$, $x_{b,j}$, $x_{c,j}$ soient tous supérieurs au nombre r défini page 56 (ce qui assure la légitimité des calculs des pages 56-60). Partons d'une valeur initiale $\overline{\zeta}_j$ extérieure à D et opérons une série de permutations élémentaires qui nous ramènent à l'origine avec des déterminations $\overline{\zeta}_{j+1}$, $\overline{\zeta}_{j+2}$, ... toutes extérieures à D. Nous désignerons respectivement par $x_{a,j+k}$, ..., $x_{c,j+k}$ les trois points

critiques correspondant à $\bar{\zeta}_{j+k}$ qui sont voisins (comme nous venons de le voir) des points critiques $x_{a,j+(k-1)}, \ldots, x_{c,j+(k-1)}$ correspondant à $\bar{\zeta}_{j+(k-1)}$. Opérant ainsi de proche en proche à partir de $\bar{\zeta}_j$, nous ferons correspondre à chaque détermination $\bar{\zeta}_{j+k}$ un point critique et un seul de chacune des séries a, b, c.

Cela dit, désignons par le signe (ω) la quantité dont s'accroît $\bar{\zeta}_j$ lorsque l'on opère, à partir de $\bar{\zeta}_j$, une permutation de la série a suivie d'une permutation de la série b : ce que nous exprimerons par l'égalité symbolique (*cf.* p. 83)

$$(\omega) = (a, b).$$

Posons de même

$$-(\omega) = (b, a), \qquad (\omega') = (b, c), \qquad -(\omega') = (c, b).$$

Si nous appelons $\bar{\bar{\zeta}}_j$ la détermination déduite de $\bar{\zeta}_j$ par *une* permutation élémentaire opérée, par exemple, autour du point critique de la série a, toutes les déterminations $\bar{y}_{i+k}$ seront données par les deux formules symboliques

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_j + m_{1*}(\omega) + n_{1*}(\omega') + m_{2*}(\omega) + \ldots, \\ \bar{\bar{y}}_j + m_{1*}(\omega) + n_{1*}(\omega') + \ldots, \end{array} \right.$$

m_1, n_1, m_2, n_2, ... étant des entiers positifs ou négatifs. Tout se passe jusqu'ici comme dans l'exemple de la page 83, où l'on trouvera l'explication des symboles que nous employons ici. Mais, dans les formules de la page 83, les combinaisons de permutations (ω), (ω') satisfaisaient à une relation remarquable qui nous avait permis de rassembler tous les termes en (ω) et tous les termes en (ω') : c'était, à savoir, la relation de commutabilité

$$(18) \qquad \big((\omega), (\omega') = (\omega'), (\omega)\big) \qquad \text{ou} \qquad (a, b, c, a, b, c) = 0.$$

Aurons-nous, dans le cas des intégrales ζ, une relation semblable?

Pour effectuer successivement les permutations (a, b, c, a, b, c) il suffit de s'éloigner de l'origine vers l'infini le long d'un rayon, puis de tourner deux fois dans un sens convenable autour de l'infini. Se peut-il que ces deux tours décrits autour de l'infini ne modifient pas la valeur de ζ?

Nous savons que les caractéristiques issues de l'origine avec la valeur initiale $\bar{\zeta}_j$ ne sont pas indéterminées pour $x=\infty$, mais deviennent infinies comme x^3 [égalité (28) de la page 57]. Posons alors

$$\zeta = x^3\theta, \qquad x^3\theta' = -3x^2\theta + x\sqrt{x}\sqrt{\theta} + 3x^2 + \alpha x + \beta :$$

la branche d'intégrale θ que nous considérons au voisinage de l'infini y prend une valeur finie. Faisons maintenant $x=\xi^{-2}$. Dire que l'intégrale finie θ n'est pas altérée lorsque x décrit deux tours autour de $x=\infty$ revient à dire que cette intégrale θ est une fonction holomorphe de ξ au voisinage de $\xi=0$. Or, un calcul facile montre que θ satisfait à l'équation

$$(19) \qquad \xi\frac{d\theta}{d\xi} = 6(\theta-1) - 2\xi\sqrt{\theta} - 2\alpha\xi^2 - 2\beta\xi^4.$$

Cette équation admet une infinité d'intégrales θ égales à 1 pour $\xi=0$; mais *l'origine est en général pour ces intégrales un point singulier transcendant*. C'est là un fait que l'on vérifiera aisément en substituant à θ un développement holomorphe à coefficients indéterminés

$$\theta = 1 + c_1\xi + c_2\xi^2 + \ldots$$

et constatant que ce développement ne saurait satisfaire à l'équation (19). L'équation (19) appartient au type d'équations que nous étudierons aux pages 124-126; pour représenter ses intégrales il faudrait faire appel à un développement procédant suivant les puissances de ξ et de $\log\xi$.

Conclusion : *la relation de commutabilité* (18) *n'est pas satisfaite pour les intégrales* ζ. Dès lors, dans les formules (17), nous n'avons pas le droit d'intervertir l'ordre des termes, et, pour déduire les unes des autres l'ensemble des déterminations d'une intégrale ζ, il faudra que nous revenions indéfiniment sur nos pas (*cf.* p. 85).

L'origine, par conséquent, n'est pas, pour l'équation (15), un point de première espèce.

VIII. — *Point d'espèce supérieure dégénérant en point de première espèce.*

Donnons une dernière application des méthodes développées dans ce Chapitre en disant quelques mots de l'équation [1]

$$zz' = 2xz + 1, \tag{20}$$

qui appartient à la catégorie étudiée aux pages 60-64 [équation (15) où $m_3 \leqq 2m_2$].

Posant $z = x^2 + \theta$, nous avons obtenu une valeur approchée de la branche d'intégrale θ qui prend en un point x_0 (supérieur à un certain nombre r) une valeur initiale C^2 plus grande que $2r^2$ (p. 60). Cette valeur approchée représente θ sur tout chemin direct (croissant ou décroissant) issu de x_0, sauf à l'intérieur de deux cercles c_1, c_2 ayant respectivement pour centres les points $\overline{x} = i\mathrm{C}$, $\overline{x}' = -i\mathrm{C}$, et pour rayon $\rho = 2r^{-\frac{1}{4}}|\mathrm{C}|$ (p. 61). D'ailleurs la branche d'intégrale considérée ne présente aucun point critique à l'extérieur et sur le contour des cercles c_1, c_2.

Appelons Z_0 la valeur [2] à l'origine de la caractéristique z issue de x_0 avec la détermination $x_0^2 + C^2$. Suivant notre méthode habituelle, nous allons chercher à déterminer *les points critiques situés sur l'ensemble des caractéristiques issues de l'origine avec la valeur initiale Z_0.*

Lemme. — *Considérons l'équation*

$$ZZ' = \overline{x}Z + 1, \tag{21}$$

dont l'intégrale générale est

$$Z - \frac{1}{\overline{x}}\log\left(Z + \frac{1}{\overline{x}}\right) = \overline{x}(x + h) \qquad (h = \text{const.}). \tag{22}$$

---

(1) Afin d'arriver à un résultat simple, nous prenons comme exemple une équation intégrable. La fonction x de $\theta = z - x^2$ est en effet définie par une équation de Riccati que l'on sait intégrer.

(2) Cette valeur croît indéfiniment avec C d'après l'égalité (36) de la page 63.

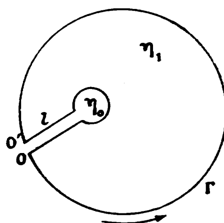
Pour une valeur donnée de h, l'intégrale (22) admet comme points critiques (points où Z s'annule) les points

$$\eta_i = -\frac{1}{x^2}\log\frac{1}{x} - h.$$

Ces points (tous situés sur une même droite) convergent vers l'infini, et nous avons déjà décrit en détail (§ IV) le mécanisme des permutations qu'ils opèrent.

Considérons, en particulier, l'ensemble des caractéristiques issues de l'origine avec une valeur initiale $\overline{Z}_0$. Pour cet ensemble, deux des points η_i seulement seront critiques (*voir* p. 86-87), soit les points η_0 et η_1. Supposons de plus que, partant de o avec

Fig. 5.



la valeur $\overline{Z}_0$, on décrive (dans le sens de la flèche) un contour fermé Γ entourant les points η_0, η_1 (*fig.* 5) : ce contour opérera [1] une permutation unique, savoir la permutation ($\overline{Z}_0$, $\overline{Z}_{-1}$) qu'opérerait un lacet élémentaire décrit autour du seul point critique η_0. En d'autres termes, si nous appelons L le contour o, Γ, o′, l, o (*fig.* 5) composé du contour Γ et d'un lacet élémentaire décrit autour de η_0, nous pouvons affirmer que *la branche d'intégrale* Z *issue de l'origine avec la valeur* $\overline{Z}_0$ *est holomorphe à l'intérieur de* L.

(1) C'est là une conséquence immédiate des résultats obtenus page 87, d'après lesquels η_0 permute $\overline{Z}_{-1}$ et $\overline{Z}_0$, η_1 permute $\overline{Z}_0$, $\overline{Z}_1$, etc. Il faut, il est vrai, pour que ces résultats s'appliquent à l'origine, que l'origine soit située d'un certain côté de la droite qui joint les points critiques η_i. Si elle était de l'autre côté, *tous* les points η_i seraient critiques pour l'ensemble de caractéristiques que nous considérons (p. 87) ; mais cette circonstance ne saurait se présenter ici, car notre ensemble de caractéristiques, étant conforme aux résultats de la page 62, ne présente pas de points critiques à l'extérieur d'*un* certain cercle c.

Ces remarques faites, considérons l'équation auxiliaire

$$zz' = [(1-\mu)\bar{x} + 2\mu x]z + 1, \tag{23}$$

où μ est un paramètre variant de o à 1. Cette équation coïncide avec l'équation (20) pour $\mu = 1$ et avec l'équation (21) pour $\mu = 0$. D'ailleurs les résultats des pages 60-64 lui sont applicables. Posant donc

$$P_\mu(x) = (1-\mu)\bar{x}x + \mu x^2,$$

déterminons C_μ par l'égalité $P_\mu(\bar{x}) + C_\mu^2 = 0$ qui donne $C_\mu^2 = -\bar{x}^2 = C^2$, et appelons $Z_{0,\mu}$ la valeur à l'origine de la caractéristique z_μ de (23) issue de x_0 avec la valeur initiale $P_\mu(x_0) + C_\mu^2$. Nous savons que l'ensemble des caractéristiques issues de l'origine avec la valeur $Z_{0,\mu}$ ne présente aucun point critique à l'extérieur de deux cercles de centres $\pm iC_\mu$, *cercles qui coïncident avec les cercles* c_1, c_2 *définis* page 101. Nous allons en conclure que *l'ensemble des caractéristiques issues de l'origine avec la valeur initiale* $Z_{0,\mu}$ *présente deux points critiques et deux seulement dans le cercle* c_1.

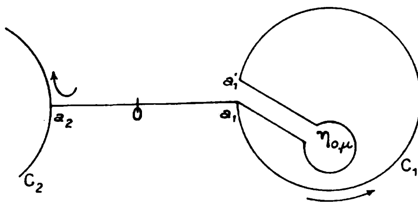
Partant de o avec la valeur $Z_{0,\mu}$, suivons dans le sens de la flèche (*fig.* 6) le contour fermé $Oa_1c_1a'_1O$ composé du segment rectiligne oa deux fois parcouru et de la circonférence c_1. Je dis que nous nous trouverons *opérer une permutation unique, c'est-à-dire la permutation qu'opérerait un lacet élémentaire décrit autour d'un seul point critique* $\eta_{0,\mu}$.

En effet, donnons à $Z_{0,0} (= \bar{Z}_0)$, dans le lemme de tout à l'heure, une valeur telle que η_0 soit intérieur à c_1 : d'après ce que nous avons vu, la proposition énoncée est bien vraie pour $\mu = 0$. Lorsque ensuite μ croît de o à 1, le point critique $\eta_{0,\mu}$ se déplace avec continuité à partir de η_0, sans sortir d'ailleurs du cercle c_1 (puisque, quel que soit μ, l'ensemble des caractéristiques que, nous considérons ne présente aucun point critique sur le contour de c_1). De plus, $\eta_{0,\mu}$ est toujours [d'après la forme de l'équation (23)] un point critique *simple* de z_μ. Il en résulte que, si nous appelons l un lacet élémentaire issu de a_1 et décrit autour de $\eta_{0,\mu}$, nous pourrons (lorsque μ variera) déformer ce lacet avec continuité de telle sorte que les caractéristiques qui s'annulent en $\eta_{0,\mu}$ ne présentent jamais aucun point critique sur le contour de l.

Appelons alors L le contour a_1, c_1, a'_1, l, a_1 (*fig.* 6) composé du contour c_1 et du lacet l, et considérons dans ce contour la branche d'intégrale qui, au point a_1, est égale à la caractéristique issue de O avec la valeur initiale $Z_{0,\mu}$. Cette branche est holomorphe dans L pour $\mu = 0$, et, puisqu'elle n'est jamais singulière sur le contour L, elle reste holomorphe dans L lorsque μ croît de 0 à 1. On en conclut que la permutation opérée par le contour c_1 équivaut à la permutation opérée par le lacet élémentaire l.

Imaginons alors que nous décrivions une série de tours sur le contour c_1 dans le sens direct : nous nous trouverons opérer une série de permutations élémentaires (une par tour) autour des

Fig. 6.



points $\eta_{0,\mu}$, $\eta_{1,\mu}$, ..., et si, après chaque tour, nous nous rendons à l'origine le long du rayon a_1o, nous y obtiendrons la suite des déterminations $Z_{1,\mu}$, $Z_{2,\mu}$, ... Nous en concluons immédiatement que l'ensemble des caractéristiques issues de l'origine avec la valeur initiale $Z_{k,\mu}$ présente dans c_1 deux seuls points critiques $\eta_{k,\mu}$ et $\eta_{(k+1),\mu}$.

Les raisonnements qui précèdent s'appliquent au cercle c_1 pour $\mu \leqq 1$. Nous pourrons faire les mêmes sur le cercle c_2, et nous aboutirons alors aux conclusions suivantes, où l'on pourra faire $\mu = 1$:

1° *L'ensemble des caractéristiques $(z)_0$ issues de l'origine avec la valeur initiale Z_0 présente (dans le plan des x) quatre points critiques et quatre seulement, dont deux sont à l'intérieur de c_1 et deux à l'intérieur de c_2.*

2° A partir de la valeur Z_0, décrivons dans le sens de la flèche (*fig.* 6) un contour fermé, L_1, ainsi composé : le segment oa_1, le contour c_1, le segment a_1a_2, le contour c_2, le segment a_2o; décrire ce contour revient à opérer deux permuta-

tions élémentaires, la première autour d'un point critique $\eta_{0,\mu}$ situé dans c_1, la seconde autour d'un point critique $\eta'_{0,\mu}$ situé dans c_2. Mais, d'autre part, l'ensemble des caractéristiques $(z)_0$ pour lequel les points $\eta_{0,\mu}$, $\eta'_{0,\mu}$ sont critiques ne présente aucun point singulier (p. 101) à l'extérieur des deux cercles c_1, c_2 : par conséquent, décrire le contour L_1 ci-dessus défini revient à faire décrire à x un tour complet autour du point $x=\infty$. Je dis que *l'ensemble des caractéristiques* $(z)_0$ *est holomorphe à l'infini,* en sorte que le contour L_1 nous ramène à l'origine avec $z=Z_0$. Pour le vérifier (*cf.* p. 100), il suffit de se rappeler que $\theta(=z-x^2)$ tend vers une valeur finie pour z égal aux caractéristiques $(z)_0$ et x tendant vers l'infini (p. 63) : d'ailleurs (p. 60), θ satisfait à l'équation différentielle

$$\theta' = \frac{1}{x^2+\theta}; \tag{24}$$

si l'on pose alors $x=\xi^{-1}$, le théorème de Cauchy montre que les intégrales θ qui sont finies au point $\xi=0$ sont holomorphes au voisinage de ce point.

Ainsi le fait suivant se trouve établi : *la permutation élémentaire opérée autour de* $\eta'_{0,\mu}$ *équivaut à la permutation élémentaire opérée autour de* $\eta_{0,\mu}$. On obtiendra, dès lors, toutes les déterminations d'une même intégrale z en tournant autour des seuls points critiques $\ldots, \eta_{-1,\mu}, \eta_{0,\mu}, \eta_{1,\mu}, \ldots$ que nous avons obtenus tout à l'heure. Ces déterminations se rangeant d'elles-mêmes en série unilinéaire, nous constatons que *l'origine est, pour les équations* (23) *et* (20), *un point transcendant de première espèce*. C'est un *point de la seconde sorte et du premier type* (*voir* p. 97).



CHAPITRE IV.

POINTS SINGULIERS DE BRIOT ET BOUQUET.

Le Chapitre précédent a surtout fait ressortir l'immense multiplicité des cas que l'on aurait à envisager si l'on tentait une classification complète des points singuliers transcendants. Ayant jeté ce coup d'œil d'ensemble sur les routes à explorer, nous allons considérer, un moment, une famille de points singuliers aujourd'hui classiques : les points jadis étudiés par Briot et Bouquet [1]. Quelle est la place de ces points dans notre classification générale? Comment en retrouverons-nous les propriétés en nous plaçant au point de vue que nous avons adopté dans ces Leçons? Si l'on y regarde de près, on s'apercevra que les points de Briot et Bouquet appartiennent, en réalité, à des types très divers, types qui ne seraient pas comparables entre eux si leur étude n'avait été envisagée d'un point de vue très spécial (cf. *Introduction*, p. 3). Aussi n'est-ce qu'une classe de ces points que nous allons étudier, classe à la vérité importante.

Considérons l'équation différentielle

$$(1) \qquad 2\frac{dy}{dx} + A_3 y^3 + A_2 y^2 + A_1 y + A_0 + A_{-1} y^{-1} + \ldots = 0,$$

équation qui peut encore s'écrire

$$(2) \qquad y = z^{-1}, \qquad 2zz' = A_3 + A_2 z + A_1 z^2 + A_0 z^3 + A_{-1} z^4 + \ldots.$$

Supposons que l'origine soit un zéro *simple* du coefficient A_3,

---

[1] *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI, 1856). Les points de Briot et Bouquet ont été étudiés par MM. Poincaré, Picard, Autonne, Bendixson, Horn, Dulac, etc. Consulter à ce sujet l'article de M. Painlevé dans l'*Encyclopädie der Mathemat. Wissensch.* : *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, t. II.

le second membre de (2) étant d'ailleurs holomorphe au voisinage des valeurs o de x et z. Dans ces conditions, l'origine est, en général, un point singulier transcendant des intégrales z (*voir* p. 12). Nous allons nous proposer d'étudier l'allure de ces intégrales au voisinage de $x = 0$.

Soient

$$A_3 = x(\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots),$$
$$A_2 = \beta + \beta_1 x + \ldots.$$

Lorsque x et z sont tous deux très petits, les termes prépondérants dans l'équation (2) sont les termes $2zz'$, αx, βz. Or, l'équation limitée à ces termes se trouve coïncider avec l'équation dont nous avons fait une étude détaillée aux pages 67 et suivantes. Nous prendrons donc cette équation

$$(3) \qquad 2zz' = \alpha x + \beta z$$

pour point de départ, et, d'après ses propriétés, nous distinguerons *a priori* divers cas.

Reportons-nous (p. 67) aux exposants

$$\lambda_1 = -2 + \frac{\beta}{2w_1}, \qquad \lambda_2 = -2 + \frac{\beta}{2w_2}$$

qui figurent dans l'expression de l'intégrale générale de l'équation (3). Nous avons vu que ces exposants satisfont à la relation invariante

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = -1;$$

il en résulte que les parties réelles de λ_1 et λ_2 ne sauraient être toutes deux positives. D'où les cas suivants [1] (le symbole $\mathfrak{R}$ signifiant *partie réelle*) :

$$(A) \qquad \mathfrak{R}(\lambda_1) > 0. \qquad \mathfrak{R}(\lambda_2) < 0:$$

1° λ_1 et λ_2 complexes; 2° λ_1 et λ_2 réels irrationnels; 3° λ_1 et λ_2 réels rationnels.

$$(B) \qquad \mathfrak{R}(\lambda_1) < 0, \qquad \mathfrak{R}(\lambda_2) < 0:$$

---

(1) Il faut écarter le cas où l'on aurait $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_2 = -1$; car, en ce cas, α serait nul et l'origine ne serait plus un zéro simple de A_3.

1° λ_1 et λ_2 complexes; 2° λ_1 et λ_2 réels irrationnels; 3° λ_1 et λ_2 réels rationnels.

(C) $$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Je me contenterai d'examiner ici les cas les plus simples et les mieux connus : ceux où λ_1 et λ_2 sont complexes, et celui où ces quantités sont réelles et de signes contraires.

I. — *Valeurs des caractéristiques à l'origine.*

Pour étudier l'équation (2) nous aurons recours à l'équation auxiliaire

$$(4) \qquad 2zz' = \alpha x + \beta z + \mu[(A_3 - \alpha x) + (A_2 - \beta)z + A_1 z^2 + \ldots]$$

qui renferme un paramètre μ variant de 0 à 1, et qui coïncide avec l'équation (3) pour $\mu = 0$, avec l'équation (2) pour $\mu = 1$. Nous étudierons [1], en premier lieu, l'allure d'une caractéristique aux environs de $x = 0$. Puis nous déterminerons le mécanisme des permutations qui s'opèrent au voisinage de l'origine, et nous reconnaîtrons que ce mécanisme est exactement celui que nous avons décrit plus haut aux pages 74-76.

Commençons par l'étude des caractéristiques. Nous savons [*voir* l'intégrale générale (3) de la page 74] que, pour $\mu = 0$, les deux caractéristiques z de (3) qui s'annulent en un point critique x_1 très voisin de l'origine restent très petites tout le long du rayon $x_1 0$. De plus, lorsque les parties réelles $\mathcal{R}(\lambda_1)$ et $\mathcal{R}(\lambda_2)$ sont négatives, ces deux caractéristiques sont différentes de 0 et holomorphes à l'origine; lorsque $\mathcal{R}(\lambda_1)$ est positif, l'une des caractéristiques issues de x_1 s'annule à l'origine comme x^{ϖ_1}, l'autre est non nulle et holomorphe. Je vais établir que *ces particularités subsistent quand le paramètre μ varie avec continuité à partir de* 0.

Pour μ voisin de 0, les caractéristiques z issues de x_1 resteront

---

[1] C'est cette étude que nous avons appelée, au Chapitre II, ***Étude de la croissance d'une branche d'intégrale.*** Il s'agit de considérer les branches ***individuellement*** avant de passer à l'étude de leurs échanges.

très petites au voisinage de l'origine, et il en sera ainsi tant que $|\mu| \leqq 1$, à condition que x_1 soit intérieur à un cercle Γ de centre o suffisamment petit. En effet, soit $\overline{x}$ un point de Γ : si, quelque près de l'origine que soit $\overline{x}$, les caractéristiques considérées avaient en $\overline{x}$ un module supérieur à un nombre fini h, il résulterait du théorème de Cauchy appliqué à l'équation (4) que ces caractéristiques seraient holomorphes autour de $\overline{x}$ dans un cercle de rayon fini ; elles ne pourraient donc admettre comme point critique un point x_1 arbitrairement voisin de l'origine. Ainsi, les caractéristiques z sont arbitrairement petites lorsque le rayon de Γ est lui-même assez petit; on peut donc toujours déterminer Γ de manière que le second membre de (4) converge absolument dans ce cercle pour z égal à l'une des caractéristiques qui s'annulent au point x_1.

Faisons le changement de variable $z = x\sqrt{\zeta}$ de manière à mettre l'équation (4) sous la forme

$$(5) \qquad x\zeta' = -2\zeta + \beta\sqrt{\zeta} + \alpha + \mu\left[\frac{A_3 - \alpha x}{x} + \sqrt{\zeta}(A_2 - \beta) + \ldots\right].$$

Les termes non écrits forment un développement [1] procédant suivant les puissances de $x\sqrt{\zeta} = z$, lequel converge absolument dans Γ pour z égal aux caractéristiques que nous considérons. D'ailleurs, $\frac{A_3 - \alpha x}{x}$, $A_2 - \beta$ et tous les termes qui figurent dans les crochets contiennent x en facteur. Nous pourrons donc toujours prendre Γ assez petit pour que les caractéristiques ζ satisfassent dans ce cercle à l'inégalité

$$(6) \qquad |x\zeta' + 2\zeta - \beta\sqrt{\zeta} - \alpha| < \mu\varepsilon\sqrt{|\zeta|},$$

ε étant un nombre donné arbitrairement petit. Dans le cas particulier où $|\zeta|$ serait borné, on pourrait de plus déterminer le rayon de Γ de manière que l'on ait dans ce cercle

$$(7) \qquad |x\zeta' + 2\zeta - \beta\sqrt{\zeta} - \alpha| < \mu h |x|,$$

h étant un nombre fini indépendant du rayon de Γ.

Cela posé, soit d'abord $\mathcal{R}(\lambda_1) < 0$, $\mathcal{R}(\lambda_2) < 0$.

---

[1] La somme de ces termes est de la forme : $x\sqrt{\zeta} \times$ développement par rapport aux puissances de z.

Considérons sur un rayon aboutissant à l'origine, le dernier [1] point critique x_1 présenté par une caractéristique ζ. Le long du rayon $x_1 o$ (les extrémités exceptées) les théorèmes de continuité sont applicables à la caractéristique ζ. Or, nous savons que, pour $\mu = o$, ζ est infini et méromorphe à l'origine. Je vais en conclure qu'*il en est encore ainsi* pour μ réel et voisin de o. Plus généralement, je dis que, si la proposition est vraie pour $\mu < \mu' < 1$, elle ne saurait cesser d'être vraie pour $\mu = \mu'$.

En effet, on suppose que, pour $\mu = \mu' - \varepsilon$ (ε arbitrairement petit), la caractéristique ζ (qui admet x_1 comme point critique) est infinie à l'origine et holomorphe au voisinage de $x = o$ le long de $x_1 o$; dès lors on peut déterminer un nombre ρ tel que l'on ait sur $x_1 o$, pour $|x| < \rho$ et $\mu \leqq \mu'$,

$$|\zeta| > \mathrm{H},$$

H étant un nombre donné arbitrairement grand. Partons d'un point $\overline{x}$ de $x_1 o$ où l'on ait cette inégalité : on aura sur $\overline{x} o$

$$|\beta\sqrt{\zeta} + \alpha| + \mu\varepsilon\sqrt{|\zeta|} < \delta |\zeta|,$$

δ étant arbitrairement petit avec ρ, et, dans ces conditions, l'inégalité (6) donnera

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta} + \frac{2}{x}\right| < \frac{\delta}{|x|}.$$

Intégrons entre $\overline{x}$ et o : nous obtiendrons

$$\left|\left[\log\zeta + \log x^2\right]_{\overline{x}}^{\overline{x}'}\right| < \delta\left[\log|x|\right]_{\overline{x}}^{\overline{x}'}.$$

Or, lorsque $\overline{x}'$ tend vers o ($\overline{x}$ restant fixe), $\left[\log x^2\right]_{\overline{x}}^{\overline{x}'}$ est très grand par rapport à $\delta\left[\log|x|\right]_{\overline{x}}^{\overline{x}'}$: l'inégalité obtenue exige donc que $\log\zeta$, et par suite ζ, deviennent infinis à l'origine tandis que ζx reste fini. C. Q. F. D.

Soit maintenant $\mathcal{R}(\lambda_1) > o$, $\mathcal{R}(\lambda_2) < o$.

Nous savons que, pour $\mu = o$, l'une des caractéristiques ζ issues

---

(1) Le plus rapproché de l'origine.

de x_1 est infinie à l'origine. La démonstration précédente prouvera donc qu'il en est encore ainsi quand μ croît à partir de o.

Considérons, d'autre part, la caractéristique ζ_μ qui pour $\mu = 0$ tend vers la valeur finie w_1^2. Tout le long de $x_1 0$ cette caractéristique est une fonction continue de μ au voisinage de $\mu = 0$. Nous pouvons donc déterminer le rayon de Γ et les nombres ρ et μ' de manière que pour x_1 intérieur à Γ et $\mu \leqq \mu'$ on ait, lorsque $|x| < \rho$,

$$|\zeta_\mu - w_1^2| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre donné arbitrairement petit. Prenant alors $\mu \leqq \mu'$, considérons sur $x_1 0$ un point $\bar{x}$ arbitrairement voisin de l'origine, où ζ_μ prenne la valeur $\bar{\zeta}$ voisine de w_2^1, et appelons w^2 (le long de $\bar{x} 0$) celle des caractéristiques de l'équation

$$(8) \qquad x\zeta' = -2\zeta + \beta\sqrt{\zeta} + \alpha$$

qui est égale à $\bar{\zeta}$ au point $\bar{x}$. Toujours en vertu des lois de continuité, cette caractéristique w^2 à l'origine est voisine de w_1^2 ; elle y est donc égale à w_1^2 [puisqu'elle ne saurait être qu'infinie ou égale à w_1^2 (p. 108)]. D'ailleurs, on aura sur $\bar{x} 0$.

$$(9) \qquad |w - w_1| < \varepsilon',$$

ε' étant arbitrairement petit en même temps que ε.

Posons maintenant $\zeta_\mu = w^2 + \theta$. Nous pourrons remplacer $\sqrt{\zeta_\mu}$ par le développement

$$w + \frac{\theta}{2w} - \frac{\theta^2}{8w^3} + \dots,$$

lequel converge pour θ voisin de o.

En particulier, nous pourrons toujours prendre ε assez petit pour que les inégalités (9) et

$$(10) \qquad |\theta| < \delta < \varepsilon$$

entraînent [1]

$$\left|\beta\sqrt{\zeta_\mu} - \beta\left(w + \frac{\theta}{2w_1}\right)\right| < \frac{\delta\sqrt{\varepsilon'}}{2}.$$

---

[1] On le vérifie en développant, par rapport aux puissances de $(w - w_1)$, les coefficients $\frac{1}{2w}$, $-\frac{1}{8w^3}$ du développement de $\sqrt{\zeta_\mu}$.

D'ailleurs, $|\zeta_\mu|$ est par hypothèse fini sur $x_1 o$. Dès lors, on peut déterminer le rayon de Γ de manière que l'on ait sur $\bar{x} o$ l'inégalité (7). Et, par conséquent, *si l'on a pris $\bar{x}$ assez petit pour que $h\bar{x}$ soit inférieur à* $\frac{\delta\sqrt{\varepsilon'}}{2}$, on aura le long de $\bar{x} o$

$$\left| x\zeta'_\mu + 2\zeta_\mu - \beta\left(w + \frac{\theta}{2w_1}\right) - \alpha \right| < \delta\sqrt{\varepsilon'}.$$

Si, maintenant, nous nous rappelons que w^2 satisfait à l'équation (8), que $\zeta_\mu = w^2 + \theta$ et que $\lambda_1 = -2 + \frac{\beta}{2w_1}$, nous pourrons écrire ce résultat sous la forme

$$(11) \qquad |x\theta' - \lambda_1\theta| < \delta\sqrt{\varepsilon'} \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{d(\theta x^{-\lambda_1})}{dx}\right| < \delta\sqrt{\varepsilon'}\,|x^{-(1+\lambda_1)}|.$$

L'inégalité (11) sera satisfaite le long de $\bar{x} o$ *à condition* que l'inégalité (10) soit elle-même satisfaite sur ce chemin. Or θ est nul au point $\bar{x}$. Donc (10) est satisfaite au voisinage de $\bar{x}$ sur un certain segment $\bar{x}\bar{x}'$ de $\bar{x} o$. Intégrons l'inégalité (11) le long du segment $\bar{x}\bar{x}'$. Tout le long de ce segment on a

$$|x^{-1-\lambda_1}| = \omega\,|x|^{-1-\mathcal{R}(\lambda_1)},$$

ω étant un nombre positif constant. Dès lors, nous aurons, puisque $\mathcal{R}(\lambda_1) > 0$ et $\theta(\bar{x}) = 0$,

$$|\bar{x}'^{-\lambda}\theta(\bar{x}')| < \delta\sqrt{\varepsilon'}.\,\omega \int_{|x'|}^{|x|} |x|^{-1-\mathcal{R}(\lambda_1)} d|x|$$
$$< \frac{\delta\sqrt{\varepsilon'}.\omega}{\mathcal{R}(\lambda_1)} |\bar{x}'|^{-\mathcal{R}(\lambda_1)} \left(1 - \left|\frac{\bar{x}'}{\bar{x}}\right|^{\mathcal{R}(\lambda_1)}\right).$$

Il est clair que, si ε' et $\bar{x}$ (par suite $\bar{x}'$) sont assez petits, cette inégalité entraîne, *a fortiori*, l'inégalité (10). On est donc conduit à une contradiction [1] en supposant que l'inégalité (10) cesse d'être satisfaite en x'; en d'autres termes, les inégalités (10) et (11) sont vérifiées tout le long de $\bar{x} o$, et $\zeta_\mu - w^2$ est inférieur à δ à

---

[1] Raisonnement déjà employé p. 42 et 49.

l'origine. Ce résultat est valable d'ailleurs, quelque petit que soit $\bar{x}$. Or, *si nous faisons tendre* $\bar{x}$ *vers* o, *nous pouvons prendre* δ *de plus en plus petit.* Donc ζ_μ est nécessairement égal à w_1^2 pour $x = 0$.

Cette démonstration établit que, si l'on a $\zeta_\mu(0) = w_1^2$ pour $\mu = 0$, on a encore cette égalité pour $\mu \leqq \mu'$. De proche en proche, elle établira que $\zeta_\mu(0)$ reste égal à w_1^2 tant que $\mu \leqq 1$. C. Q. F. D.

II. — *Étude du cas* $\mathcal{R}(\lambda_1) > 0$, $\mathcal{R}(\lambda_2) < 0$, λ_1 *et* λ_2 *complexes.*

Considérons l'ensemble des caractéristiques z de l'équation (4) issues de l'origine avec une valeur initiale a voisine de o.

Lorsque $\mu = 0$, cet ensemble jouit de la propriété suivante, mise en lumière par l'analyse de la page 72 : il ne présente dans tout le plan qu'*un* point critique x_1, d'autant plus rapproché de l'origine que a est plus petit.

Les lois de continuité, applicables partout sauf au voisinage de l'infini ([1]), montrent que la propriété subsiste pour μ voisin de o. On peut donc trouver un cercle Γ de centre $x = 0$ et des nombres μ_1, a_1 tels que, pour $|\mu| < \mu_1$ et $|a| < a_1$, *l'ensemble des caractéristiques issues de l'origine avec la valeur initiale* a *ne présente qu'un point critique dans le cercle* Γ.

Traçons un cercle γ concentrique à Γ, contenu dans Γ, mais contenant x_1. Soient, d'autre part, $\bar{x}$ un point fixe et $\bar{z}$ la valeur en $\bar{x}$ de l'une quelconque des deux caractéristiques issues du point x_1 avec la valeur critique o. Nous allons chercher une expression analytique qui représente $\bar{z}$ pour les valeurs de $\bar{x}$ comprises entre les cercles γ et Γ. (Nous prendrons Γ assez petit ([2]) pour que le second membre de l'équation (5) converge absolument en un point quelconque $\bar{x}$ du cercle Γ pour $z = \bar{z}$ et $|\mu| \leqq 1$.)

Nous remarquerons d'abord que, si μ_1 et $|x_1|$ sont suffisam-

---

([1]) Il n'y a pas à s'occuper de l'origine, puisque les caractéristiques considérées y sont holomorphes (si a n'est pas nul).

([2]) Cela est toujours possible d'après les remarques de la page 109.

ment petits, *la valeur* initiale $\bar{z}$ *sera* (*pour* $|\mu| < \mu_1$) *très voisine* de $\omega_2 \bar{x}$. Reportons-nous, en effet, à l'intégrale (3) de la page 70, qui n'est autre que l'intégrale générale de (4) pour $\mu = 0$. Afin d'obtenir des caractéristiques qui présentent des points critiques arbitrairement près de l'origine, il faut, dans cette intégrale, donner à la constante C des valeurs de plus en plus grandes; or, l'égalité (3) de la page 70 montre que, lorsque $|C|$ croît indéfiniment, ω tend vers ω_2 quel que soit x.

Donnant alors à $|\mu|$ une valeur quelconque *inférieure* à μ_1, prenons l'équation (5) et faisons-y

$$\zeta = \omega_2^2 + u.$$

En développant $\sqrt{\zeta}$ par rapport aux puissances de u et nous rappelant la valeur de λ_2, nous mettrons l'équation (5) sous la forme

$$(12) \qquad x u' = \lambda_2 u + e_{10} x + e_{20} x^2 + e_{11} x u + e_{02} u^2 + \ldots,$$

les e étant des coefficients que nous nous dispenserons de calculer. Appelons $\bar{u}$ la valeur initiale (voisine de zéro) $\bar{u} = \frac{\bar{z}^2}{\bar{x}^2} - \omega_2^2$. Le second membre de (12) converge absolument pour u voisin de zéro et pour x intérieur au cercle Γ; il converge, par conséquent, pour x et u voisins de $\bar{x}$ et $\bar{u}$.

Cela posé, introduisons l'équation auxiliaire

$$(13) \qquad x u' = \lambda_2 u + \nu [e_{10} x + e_{20} x^2 + \ldots],$$

où ν est un paramètre que nous ferons varier de 0 à 1.

Le coefficient différentiel u' est une fonction holomorphe des trois variables x, u, ν, pour u voisin de $\bar{u}$, et pour x voisin de 0 et $\bar{x}$ mais *non nul*. Dans ces conditions, les théorèmes de continuité permettent de développer par rapport aux puissances de ν (autour de l'origine, sinon en son voisinage immédiat) l'intégrale u de (13) qui est égale à $\bar{u}$ au point $\bar{x}$. Cette intégrale sera de la forme

$$(14) \qquad u = u_1 \nu + u_2 \nu^2 + \ldots,$$

et les coefficients u (*voir* p. 37) seront déterminés par les équa-

tions différentielles linéaires

$$(15)\quad \begin{cases} x u'_1 = \lambda_2 u_1 + \text{termes en } x,\ x^2,\ \ldots, \\ x u'_2 = \lambda_2 u_2 + \text{termes en } x u_1,\ x^2 u_1,\ \ldots, \\ x u'_3 = \lambda_2 u_3 + \text{termes en } u_1^2,\ x u_1^2,\ \ldots,\ x u_2,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

les seconds membres de ces équations étant, par rapport à u_1, u_2, ..., des *polynomes* dont les coefficients sont convergents tant que le second membre de (12) est lui-même convergent.

La première équation (15) admet l'intégrale générale

$$u_1 = h x^{\lambda_2} + x\,[l_{10} + l_{11} x + \ldots] \qquad (h \text{ constante arbitraire}),$$

la fonction entre crochets étant holomorphe [1] dans le cercle Γ.

Portant cette valeur dans la seconde équation (15), nous obtiendrons l'intégrale générale

$$u_2 = h_1 x^{\lambda_2} + h x^{\lambda_2} x[\,l'_{20} + l'_{21} x + \ldots] + x^2[\,l_{20} + l_{21} x + \ldots],$$

h_1 étant une constante arbitraire et les fonctions entre crochets étant holomorphes dans Γ. Mais nous avons le droit de supposer que h_1 est nul, de même que toutes les constantes arbitraires qui figurent dans les développements de u_3, u_4, etc. En effet, il est clair qu'il nous suffit de conserver dans l'expression générale (14) de l'intégrale u une seule constante arbitraire h; cette constante sera déterminée de manière que u prenne une valeur initiale donnée [2] $\overline{u}$ en un point donné $\overline{x}$. En poursuivant alors notre calcul, nous vérifierons sans peine que u_3 est de la forme

$$u_3 = x^3[\,l_{30} + l_{31} x + \ldots] + x^2 h x^{\lambda_2}[\,l'_{30} + l'_{31} x + \ldots] + x h^2 x^{2\lambda_2}[\,l''_{30} + \ldots],$$

et, d'une manière générale, que u_k est de la forme

$$u_k = x^k[\,l_{k0} + \ldots] + x^{k-1} h x^{\lambda_2}[\,l'_{k0} + \ldots] + \ldots + x h^{k-1} x^{(k-1)\lambda_2}[\,l_{k0}^{(k-1)} + \ldots],$$

les fonctions entre crochets étant holomorphes dans Γ.

---

(1) Le calcul qui donne l'intégrale générale de la première équation (15) montre en effet que la fonction $l_{10} + l_{11} x + \ldots$ converge autour de $x = 0$, dans le cercle où le second membre de l'équation est lui-même convergent. De même plus bas pour les diverses fonctions qui sont entre crochets dans l'expression de u_k.

(2) La valeur de $\overline{x}^{\lambda_2}$, et par suite celle de h, ne sera déterminée qu'à un multiple de $2e^{2i\pi\lambda_2}$ près. Pour la déterminer tout à fait, nous supposerons que dans $\overline{x}^{\lambda_2} = e^{\lambda_2 \log \overline{x}}$ on prenne pour $\log \overline{x}$ la détermination de plus petit module.

Donnons en particulier à $\bar{z}$ ou à $\bar{u}$ $\left(=\frac{\bar{z}^2}{\bar{x}^2}-w_2^2\right)$ une valeur répondant aux conditions énoncées page 113, en sorte que l'ensemble des caractéristiques issues de $\bar{x}$ avec la valeur $\bar{u}$ ne présente aucun point critique dans la couronne circulaire Σ limitée par les cercles γ et Γ. Alors, d'après les lois de continuité, le développement (14) reste absolument convergent dans la couronne Σ, quel que soit ν entre 0 et 1. On en conclut que ce développement est une fonction holomorphe des trois variables ν, x, hx^{λ_2} pour $|\nu|\leqq 1$, x situé dans Γ, et $|hx^{\lambda_2}|$ inférieur à un certain nombre σ. En particulier, pour $\nu=1$, *la branche d'intégrale définie par la valeur initiale $\bar{u}$ est développable, dans la couronne Σ, par rapport aux puissances de x et hx^{λ_2}.*

Lorsque h prend la valeur particulière 0, le développement (14) converge dans tout le cercle Γ, et représente *une intégrale particulière* U *qui est nulle à l'origine et holomorphe dans* Γ. Nous appellerons $Z_1\left(=x\sqrt{w_2^2+U}\right)$ l'intégrale correspondante (nulle et holomorphe à l'origine) de l'équation (4).

Soit maintenant h différent de 0. Lorsque x, dans la couronne Σ, décrit un tour autour de l'origine, hx^{λ_2} change de valeur : plus précisément, la constante h est multipliée par $e^{\pm 2i\pi\lambda_2}$. Supposons, pour fixer les idées, que le coefficient de i dans λ_2 soit positif, et tournons dans le sens direct : alors, à chaque tour, le module de h décroît, et le développement (14) ne cesse pas d'être convergent. D'ailleurs, lorsque x tourne ainsi indéfiniment autour du cercle γ, h tendant vers 0, *la valeur $\bar{z}$ de z au point $\bar{x}$ tend vers la valeur $Z_1(\bar{x})$ que prend en $\bar{x}$ l'intégrale particulière Z_1.*

Nous avons établi ces divers résultats en donnant à $|\mu|$ une valeur comprise entre 0 et μ_1. Avant d'aller plus loin, montrons que *ces résultats resteront valables tant que* $|\mu|\leqq 1$.

Soit r un nombre tel que u [donné par le développement (14)] soit une fonction homolorphe de x, hx^{λ_2}, μ et ν pour $|x|<r$, $|hx^{\lambda_2}|<r$, $|\mu|<\mu_1$ et $|\nu|\leqq\nu'\leqq 1$. Il est clair [1] que, r restant

---

[1] Les paramètres μ et ν jouent ici le même rôle, et nous aurions pu nous contenter d'introduire un de ces paramètres au lieu de deux ; mais il est commode de se servir tantôt de l'un, tantôt de l'autre, suivant les besoins du calcul.

fixe, μ_1 pourra être pris d'autant plus grand que ν' sera plus petit. D'ailleurs, lorsque la limite μ_1 tendra vers 1, la limite ν' tendra vers une limite différente de zéro ([1]) : on peut donc trouver un nombre ν_1 tel que u soit holomorphe pour $|x| < r$, $|hx^{\lambda_2}| < r$, $|\mu| \leqq 1$ et $|\nu| < \nu_1$.

Reportons-nous alors à l'expression de u_k (p. 115) et appelons M_k la plus grande valeur prise, pour $|x| < r$, par l'expression

$$\sum_{j=0}^{j=\infty} |l_{kj} x^j| + \sum |l'_{kj} x^j| + \ldots + \sum |l_{kj}^{(k-1)} x^j|.$$

Puisque u est holomorphe, la somme des modules des termes (en x, h^{λ_2} et ν) du développement (14) est convergente dans les limites que nous nous sommes assignées; nous sommes donc assurés que la série $\sum_{k=1}^{k=\infty} M_k (r\nu_1)^k$ est une série convergente : nous en concluons que *le développement* (14) *reste convergent tant que* $|\nu| \leqq 1$, $|x| < r\nu_1$, $|hx^{\lambda_2}| < r\nu_1$.

Convenons en particulier de toujours prendre pour valeur de $e^{\lambda_2 \log x}$ celle qui correspond à la plus petite détermination du logarithme. Alors, nous aurons ce résultat : POURVU QUE H SOIT ASSEZ PETIT, ON PEUT DÉTERMINER DES NOMBRES r' ET r'' $(r' < r'' \leqq r)$ TELS QUE (QUELS QUE SOIENT $|\mu|$ ET $|\nu|$ COMPRIS ENTRE O ET 1) LE DÉVELOPPEMENT (14) REPRÉSENTE UNE FONCTION HOLOMORPHE DE x ET hx^{λ_2} POUR $r' < |x| < r''$ ET $|h| < H$.

Partons maintenant du point $\overline{x}$ $(r' < |\overline{x}| < r'')$ avec une valeur initiale ([2]) $\overline{u}$ assez voisine de $U(\overline{x})$ pour que la valeur correspondante de h ait un module inférieur à H; puis tournons indéfiniment autour de l'origine dans la couronne de centre o où $r' < |x| < r''$. Si nous tournons dans un sens convenable h décroît indéfiniment (p. 116); donc le développement (14) ne cesse pas de converger, *et z tend vers l'intégrale particulière* Z_1.

([1]) Pour $\nu = 0$, les intégrales u de (13) ne présentent aucun point critique en dehors de l'origine et de l'infini. Il est donc impossible que le développement (14) cesse de converger pour $\nu = 0$, $|x| \leqq r$, $|hx^{\lambda_2}| \leqq r$.

([2]) Cette valeur est déterminée univoquement d'après la note 2 de la page 115; en particulier, à la valeur $\overline{u}$ de $U(\overline{x})$ correspond la seule valeur o de h.

Les caractéristiques issues de $\bar{x}$ avec la valeur $\bar{u}$ ne peuvent par hypothèse présenter des points critiques de module inférieur à r'' si ce n'est à l'intérieur du cercle Γ' de centre o et de rayon r'. Combien en présentent-elles?

Donnons-nous à l'origine une valeur initiale a voisine de o, à laquelle nous ferons correspondre (comme nous l'avons expliqué page 113) des valeurs déterminées $\bar{z}$, $\bar{u}$ de z et u au point $\bar{x}$, et, par suite, une valeur déterminée de h. Pour que h soit nul, il faudra que a soit nul également; déterminons alors, autour de $a = 0$, une région Δ telle qu'à une valeur de a située dans Δ corresponde une valeur de h de module inférieur à H. Lorsque a variera dans Δ, les valeurs correspondantes de $\bar{z}$, $\bar{u}$, h engendreront des fonctions continues de a. D'ailleurs, ces fonctions seront uniformes : en effet, quel que soit a dans Δ, $\bar{x}$ sera, nous l'avons vu, un point d'holomorphisme pour l'intégrale z égale à $\bar{z}$ au point $\bar{x}$; il ne pourra donc pas arriver que deux déterminations de $\bar{z}(a)$ viennent se confondre.

Cela dit, considérons l'ensemble des caractéristiques issues de l'origine avec une valeur a située dans Δ. D'après ce que nous avons vu page 113, on pourra toujours trouver un nombre μ_1 tel que, pour μ réel et inférieur à μ_1, l'ensemble considéré ne présente qu'*un* point critique dans le cercle Γ' de centre o et de rayon r' [et par conséquent, dans le cercle concentrique Γ'' de rayon r'', puisque le développement (14) est, par hypothèse, holomorphe entre Γ' et Γ'']. Supposons alors que pour $\mu \geqq \mu_1$ cet ensemble présente plusieurs points critiques dans Γ' : il faudra, d'après les lois de continuité, que pour $\mu = \mu_1$ il ait des points critiques *sur le contour* même de Γ', par conséquent, que pour $\mu = \mu_1 - \varepsilon$ il ait des points critiques situés entre Γ' et Γ'' et voisins du contour de Γ'. Cette circonstance ne se présentant pas, nous pouvons conclure que, quel que soit μ entre o et 1, *l'ensemble des caractéristiques issues de l'origine avec une valeur initiale a située dans Δ ne présente qu'un point critique dans* Γ'.

Jusqu'ici, le mécanisme des permutations opérées au voisinage de l'origine est le même pour l'équation réduite (3) et pour l'équation (2). Cette similitude va se manifester encore dans l'étude que nous allons faire des permutations opérées *directement* autour de l'origine.

Prenant μ quelconque entre o et 1, reportons-nous de nouveau à l'équation (5) et posons

$$\zeta = w_1^2 + t$$

de manière à mettre l'équation (5) sous la forme

$$(17) \qquad xt' = \lambda_1 t + d_{10}x + d_{20}x^2 + d_{11}xt + d_{02}t^2 + \ldots.$$

Il résulte du paragraphe précédent (p. 113) que l'une des caractéristiques t issues d'un point critique x_1 voisin de o est nulle à l'origine (ζ étant égal à w_1^2). Nous allons étudier cette caractéristique t.

Prenons un point $\bar{x}$ sur x_1o et soit $\bar{t}$ la valeur en $\bar{x}$ (valeur voisine de o) de la caractéristique t. Je dis que L'ENSEMBLE DES CARACTÉRISTIQUES ISSUES DE $\bar{x}$ AVEC LA VALEUR INITIALE $\bar{t}$ EST REPRÉSENTABLE AU VOISINAGE DE L'ORIGINE PAR UN DÉVELOPPEMENT PROCÉDANT SUIVANT LES PUISSANCES ENTIÈRES DE x ET DE cx^{λ_1} (c étant une constante arbitraire).

Considérons, en effet, l'équation auxiliaire

$$(18) \qquad xt' = \lambda_1 t + \nu[d_{10}x + \ldots],$$

où ν est un paramètre variant de o à 1, et étudions l'ensemble des caractéristiques issues de $\bar{x}$ avec une valeur initiale $\bar{t}$ voisine de o. Pour $\nu = 0$, cet ensemble ne présente aucun point critique, l'origine exceptée. Dès lors, pour ν voisin de o, il n'aura aucun point critique dans une couronne circulaire de centre o (soit lorsque $\rho_1 < |x| < \rho'_1$, ρ_1 étant arbitrairement petit si $|\nu|$ est inférieur à un nombre ν_1 assez petit.

Procédant alors comme à la page 114, nous pourrons représenter l'ensemble des caractéristiques t par un développement

$$(19) \qquad t = t_1\nu + t_2\nu^2 + \ldots$$

absolument convergent pour $|\nu| < \nu_1$, $\rho_1 < |x| < \rho'_1$. D'ailleurs, les t_k (p. 115, éq. 15) sont des polynomes en cx^{λ_1} [c constante arbitraire déterminée ([1]) par la valeur initiale $\bar{t}$] dont les coeffi-

([1]) *Voir* page 115, note 2. La valeur de c sera entièrement déterminée en fonction de la valeur initiale $\bar{t}$ si nous convenons de prendre (au point $\bar{x}$) dans $x^{\lambda_1} = e^{\lambda_1 \log x}$ la plus petite détermination du logarithme.

cients sont des fonctions, holomorphes dans Γ, nulles pour $x = 0$. Je dis que le développement (19) (convergent pour $\rho_1 < |x| < \rho'_1$) convergera *a fortiori* pour $|x| < \rho_1$. Traçons, en effet, le cercle γ_1 de centre o et de rayon ρ_1; menons une coupure suivant un rayon de ce cercle; puis, partant du contour de γ_1 avec la détermination (19), faisons mouvoir x dans γ_1 sans franchir la coupure. Dans ces conditions, considérons la variation de la somme $\sum_{k=1}^{k=n} |t_k \nu_1^k|$, et appelons N la plus grande valeur prise par cette somme sur le contour de γ_1. S'il arrivait qu'en certains points de γ_1 la somme Σ fût supérieure à 2N par exemple, il existerait nécessairement *à l'intérieur* de γ_1 un contour fermé, ne renfermant pas l'origine, sur lequel Σ serait compris entre N et 2N, et dans lequel Σ dépasserait 2N. Mais cela est impossible, car, en ce cas, Σ deviendrait infini dans γ_1, ce qui n'a pas lieu. [Σ s'annule à l'origine, puisque $\mathcal{R}(\lambda_1) > 0$.] Donc Σ est inférieur à 2N dans tout γ_1, et, puisque N reste fini quand n croît indéfiniment, la somme $\sum_{k=1}^{k=\infty}$ est convergente pour $|x| < \rho_1$, $|\nu| \leqq \nu_1$. On en conclut que *le développement* (19) *est une fonction holomorphe des trois variables* ν, x *et* cx^{λ_1} pour $|\nu| \leqq \nu_1$, $|x| < \rho'_1$ et $|cx^{\lambda_1}|$ inférieur à un certain nombre σ.

Appelons en particulier s le plus petit des deux nombres ρ'_1 et σ. En procédant exactement comme à la page 117, nous démontrerons que *le développement* (19) *restera convergent tant que* $|\nu| \leqq 1$, *pourvu que* $|x| < s\nu_1$, $|cx^{\lambda_1}| < s\nu_1$.

Cela dit, partons, avec une valeur initiale $\bar{t}$, d'un point fixe $\bar{x}$ intérieur au cercle Γ_1 de centre o et de rayon $s\nu_1$, et supposons $|\bar{x}|$ et $|\bar{t}|$ assez petits pour que la valeur de c définie par ces conditions initiales satisfasse à l'inégalité [1] $|c\bar{x}^{\lambda_1}| < s\nu_1$. Lorsque x décrit dans le cercle Γ_1 un tour complet autour de l'origine, la constante c est multipliée par $e^{\pm 2i\pi\lambda_1}$. Supposons, pour fixer les idées, que le coefficient de i dans λ_1 soit positif. Alors, lorsque nous tournons indéfiniment autour de l'origine dans le sens direct,

---

[1] La valeur de $\bar{x}^{\lambda_1}$ étant fixée par la note précédente.

c tend vers o; dans ces conditions, le développement (19) ne cesse pas de converger, et t tend vers l'intégrale particulière T obtenue en faisant $c = 0$ dans (19). Cette intégrale est holomorphe dans tout le cercle Γ_1 : *nous appellerons* Z *l'intégrale correspondante de l'équation* (4) *en* z.

Qu'arriverait-il si nous tournions, au contraire, autour de l'origine dans le sens indirect? La constante c augmenterait alors indéfiniment, et il serait aisé de vérifier que le cercle de convergence du développement (19) tendrait vers o. Si nous continuions à tourner indéfiniment, nous obtiendrions des caractéristiques z présentant des points critiques de plus en plus rapprochés de l'origine et convergeant, par suite, vers l'intégrale particulière Z_1, ainsi que nous l'avons expliqué plus haut.

Nous pouvons résumer en deux lignes l'ensemble des conclusions de ce paragraphe : *le mécanisme des permutations qui s'opèrent au voisinage de l'origine pour une intégrale de l'équation* (4) *est exactement le mécanisme décrit à la page* 72. Soit $\bar{x}$ un point arbitrairement rapproché de l'origine. Nous constatons que l'ensemble des déterminations obtenues au point $\bar{x}$ peut être représenté par le Tableau suivant [1] :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots, & & \bar{z}_{-1}; & & & \bar{z}_0; & & \bar{z}_1, & \ldots; \\
& / & & \backslash & / & & \backslash \;\; / & & \backslash \\
x_{-1,1}, & \ldots, & & x_{-1,k_{-1}}; & x_{0,1}, & \ldots; & x_{1,1}, & \ldots; & \\
= & & & = & = & & = & & \\
\bar{\bar{z}}_{-1,1}, & \ldots, & & \bar{\bar{z}}_{-1,k_{-1}}; & \bar{\bar{z}}_{0,1}, & \ldots; & \bar{\bar{z}}_{1,1}, & \ldots. &
\end{array}$$

La première ligne contient les déterminations qui s'annulent pour $\bar{x} = 0$ et se permutent autour de l'origine. La dernière ligne contient les déterminations qui ne s'annulent pas pour $\bar{x} = 0$. De plus, chaque détermination $\bar{\bar{z}}_{j,k}$ se permute avec la détermination $\bar{z}_j$ correspondante autour du point critique $x_{j,k}$ inscrit au-dessus d'elle dans la seconde ligne. Si nous nous référons alors aux définitions de la page 96, nous pouvons dire que, pour

[1] Lorsque la partie réelle de $\frac{1}{\lambda_1}$ est comprise entre 1 et 2, il correspond à chaque détermination $\bar{z}$ une détermination $\bar{\bar{z}}$ au plus (*cf.* p. 71-73).

l'équation (4), L'ORIGINE EST UN POINT TRANSCENDANT DE PREMIÈRE ESPÈCE, DE LA PREMIÈRE SORTE ET DU SECOND TYPE.

III. — *Étude du cas* $\mathcal{R}(\lambda_1) > 0$, $\mathcal{R}(\lambda_2) < 0$, λ_1 *et* λ_2 *réels.*

Dans l'hypothèse où λ_1 et λ_2 sont réels, il convient de distinguer deux cas suivant que ces quantités sont irrationnelles ou rationnelles.

En premier lieu, supposons λ_1 et λ_2 *irrationnels*. Tous les calculs que nous avons faits au paragraphe précédent subsistent alors sans modifications. Mais l'une des conséquences principales que nous avions tirées de ces calculs se trouve être en défaut : *les intégrales* z, *développables par rapport aux puissances de* x *et* cx^{λ_1} *et par rapport aux puissances de* x *et* hx^{λ_2}, *ne tendent plus vers les intégrales particulières* Z *et* Z_1. En effet, pour λ_1 et λ_2 réels irrationnels, les expressions $e^{2ki\pi\lambda_1}$, $e^{2ki\pi\lambda_2}$ (où l'entier k prend des valeurs de plus en plus grandes) conservent des modules constants, tandis que leurs arguments tendent vers toutes les valeurs réelles.

Prenons alors un point fixe $\bar{x}$ voisin de o et une valeur de c telle que le développement

$$\Sigma\Sigma a_{jj'} x^j (cx^{\lambda_1})^{j'} \tag{20}$$

de z par rapport aux puissances de x et cx^{λ_1} soit absolument convergent pour $|x| \leqq |\bar{x}|$. Puis considérons dans le plan des z les points de la courbe représentée par l'égalité

$$z(\bar{x}) = \Sigma\Sigma a_{jj'} \bar{x}^j (|c| e^{i\omega} |\bar{x}|^{\lambda_1})^{j'} \tag{21}$$

lorsqu'on fait varier ω de o à 2π par valeurs réelles. Le développement (21), restant absolument convergent pour les valeurs considérées de ω, est une fonction uniforme de cette quantité. Il représente donc, dans le plan des z, une courbe fermée entourant $z = 0$; et, LORSQUE x, SUR LE CONTOUR DU CERCLE $x = |\bar{x}|$, TOURNE INDÉFINIMENT AUTOUR DE L'ORIGINE, LA DÉTERMINATION INITIALE $z(\bar{x})$ SE PERMUTE AVEC UNE INFINITÉ DE DÉTERMINATIONS $z_1(\bar{x})$, $z_2(\bar{x})$, ... QUI CONVERGENT VERS TOUS LES POINTS

DE CETTE COURBE FERMÉE (21). Si ensuite nous faisons croître $|c|$, nous obtiendrons une série de courbes (21) s'emboîtant les unes dans les autres et se rapprochant de plus en plus de l'origine : à chacune de ces courbes correspondra une branche d'intégrale différente; pour $c = 0$, nous retomberions sur l'intégrale particulière Z.

On déduirait aisément de là que les points critiques x_j d'une intégrale z, situés (au voisinage de l'origine) sur les caractéristiques issues de $\overline{x}$ avec les déterminations $z_j(\overline{x})$, ne convergent plus vers $x = 0$ comme il arrivait au paragraphe précédent : *ces points critiques convergent vers tous les points d'une petite courbe fermée entourant l'origine.*

Nous n'insisterons pas sur ce cas, qui nous met en présence de circonstances toutes nouvelles; car nous avons toujours admis jusqu'ici que les points critiques d'une même branche d'intégrale convergeaient vers un point-limite unique.

Supposons maintenant que λ_1 et λ_2 soient *rationnels* et reportons-nous à l'équation (17) de la page 119,

$$(17) \qquad z = x\sqrt{w_1^2 + t}, \qquad xt' = \lambda_1 t + d_{10}x + \ldots,$$

équation qui nous a permis d'étudier les caractéristiques z nulles à l'origine. Nous examinerons seulement *le cas où* $\lambda_1 = 1$: on n'aura pas de peine à traiter de la même manière le cas général; d'ailleurs, il serait aisé de vérifier ([1]) qu'il existe toujours un changement de variables rationnel permettant de transformer une équation (17) où λ_1 est réel rationnel en une équation (17) où $\lambda_1 = 1$. Soit donc $\lambda_1 = 1$ et :

PREMIÈREMENT : $d_{10} = 0$. — Je dis que L'ÉQUATION

$$(22) \qquad xt' = t + d_{20}x^2 + d_{11}xt + d_{02}t^2 + \ldots$$

ADMET UNE INFINITÉ DE CARACTÉRISTIQUES NULLES ET HOLOMORPHES A L'ORIGINE ET FONCTIONS HOLOMORPHES D'UN PARAMÈTRE C.

([1]) *Voir* les Ouvrages cités page 106, note 1.

En effet, cherchons à satisfaire à l'équation (22) en posant

$$t = \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \ldots. \tag{23}$$

Nous vérifions immédiatement que η_1 reste arbitraire et que les coefficients η_2, η_3, ... sont déterminés par les égalités

$$2\eta_2 = \eta_2 + d_{20} + d_{11}\eta_1 + d_{02}\eta_1^2,$$
$$3\eta_3 = \eta_3 + \text{fonction de } \eta_1, \eta_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi, nous pouvons déterminer formellement le développement (23) lorsque nous nous donnons une valeur arbitraire de η_1. Je dis que, quel que soit η_1, ce développement est une fonction holomorphe de x et η_1 au voisinage de $x = 0$. En effet, supposons le développement (23) ordonné par rapport aux puissances de x et de $\eta_1 x$: nous n'avons qu'à reproduire textuellement la démonstration des pages 119-120 pour constater que le développement (23) est convergent pour $|x|$ et $|\eta_1 x|$ inférieurs à un certain nombre σ. On voit ainsi que, dans les conditions où nous sommes placés, *l'origine n'est plus un point singulier transcendant pour l'équation* (4).

Les branches d'intégrales nulles à l'origine sont, disons-nous, fonctions holomorphes d'un paramètre η_1. Au lieu du coefficient η_1, on pourrait, si l'on voulait, prendre comme paramètre la valeur C prise par les branches considérées en un point fixe voisin de l'origine.

Soit maintenant :

Deuxièmement : $d_{10} \neq 0$. — Je dis que l'équation

$$x t' = t + d_{10} x + d_{20} x^2 + \ldots \tag{24}$$

admet une infinité de branches d'intégrales nulles a l'origine et développables, au voisinage de l'origine, par rapport aux puissances de x et de $d_{10} x \log x$.

Considérons, comme nous en avons pris l'habitude, l'équation auxiliaire

$$x t' = t + \nu(d_{10} x + \ldots). \tag{25}$$

Nous savons que l'ensemble des caractéristiques t issues d'un

point $\bar{x}$ voisin de l'origine avec une valeur $\bar{t}$ voisine de o est représentable par un développement de la forme

$$(26) \qquad t = t_1 \nu + t_2 \nu^2 + \ldots$$

absolument convergent pour $|\nu| < \nu_1$, $\rho_1 < |x| < \rho'_1$ (*voir* p. 119). D'ailleurs, les t_k sont déterminés (*cf.* p. 115) par les équations linéaires

$$x t'_1 = t_1 + d_{10} x + d_{20} x^2 + \ldots,$$
$$x t'_2 = t_2 + \text{termes en } x t_1,\ x^2 t_1,\ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et l'on en déduit (*cf.* p. 115) que les t_k sont de la forme

$$t_1 = d_{10} x \log x + x(c + l_{11} x + \ldots) \qquad (c = \text{const. arbitraire}),$$
$$t_2 = x(d_{10} x \log x)(l'_{20} + l'_{21} x + \ldots) + x^2(l_{20} + l_{21} x + \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$t_k = x^k(l_{k0} + \ldots) + x^{k-1}(d_{10} x \log x)(l'_{k0} + \ldots) + \ldots$$
$$+ x(d_{10} x \log x)^{k-1}(l_{k0}^{(k-1)} + \ldots).$$

Dans ces développements, les coefficients l dépendent de la constante arbitraire c. Convenons, en particulier, de prendre comme valeur initiale de $\log \bar{x}$ la plus petite détermination de ce logarithme. Alors la valeur de c sera entièrement déterminée par la valeur iniale $\bar{t}$.

Les fonctions t_k s'annulent toutes à l'origine. On en déduit, comme à la page 120, que le développement (26) (convergent pour $\rho_1 < |x| < \rho'_1$, lorsque la valeur initiale $\bar{t}$ est assez petite) converge, *a fortiori*, pour $|x| \leqq \rho_1$. Donc le développement (26) est une fonction holomorphe des trois variables ν, x et $d_{10} x \log x$ pour $|\nu| \leqq \nu_1$, $|x|$ et $|d_{10} x \log x|$ inférieurs à un certain nombre r.

Appelons alors M_k la plus grande valeur prise pour $|x| < r_1$ par l'expression

$$\sum_{j=0}^{j=\infty} |l_{k_j} x^j| + \sum |l'_{k_j} x^j| + \ldots + \sum |l_{k_j}^{(k-1)} x^j|.$$

En raisonnant comme à la page 117, nous constatons que la série $\sum_{k=1}^{k=\infty} M_k (r \nu_1)^k$ est une série convergente, et nous en concluons que

le développement (26) *reste convergent tant que* $|\nu| \leqq 1$, $|x| < r\nu_1$, $|d_{10} x \log x| < r\nu_1$. La proposition énoncée est donc démontrée.

Si maintenant, partant du point $\bar{x}$ avec la valeur initiale $\bar{t}$, nous décrivons une série de tours autour de l'origine, $\log \bar{x}$ prend, après chaque tour, une valeur nouvelle, et nous obtenons ainsi en $\bar{x}$ une infinité de déterminations qui se permutent directement entre elles autour de l'origine.

IV. — *Étude du cas* $\mathcal{R}(\lambda_1) < 0$, $\mathcal{R}(\lambda_2) < 0$, λ_1 *et* λ_2 *complexes.*

Nous allons examiner rapidement ce cas à titre de dernier exemple.

Considérons l'ensemble des caractéristiques z de l'équation (4) issues de l'origine avec une valeur initiale a voisine de o. Lorsque $\mu = 0$, cet ensemble jouit de la propriété suivante mise en lumière par l'analyse de la page 70; il ne présente dans tout le plan que *deux* points critiques x_1, x_2, d'autant plus rapprochés de l'origine que a est plus petit. Dès lors, en vertu des lois de continuité (*comparez* p. 113), on peut trouver un cercle Γ de centre $x = 0$ et des nombres μ_1, a_1 tels que, pour $|\mu| < \mu_1$ et $|a| < a_1$, *l'ensemble des caractéristiques de* (4) *issues de l'origine avec la valeur initiale a ne présente que deux points critiques* x_1, x_2 *dans le cercle* Γ.

Traçons un cercle γ, concentrique à Γ, contenu dans Γ, mais contenant x_1 et x_2. Nous nous proposerons de trouver une expression analytique qui représente, pour les valeurs de $\bar{x}$ comprises entre γ et Γ, l'une ou l'autre des deux caractéristiques issues de x_1 avec la valeur critique o.

Remarquons d'abord que, si $\mu = 0$ et si $|x_1|$ est très petit, l'une des caractéristiques considérées est très voisine de $w_1 x$ entre γ et Γ, tandis que l'autre est très voisine de $w_2 x$. En effet, pour les caractéristiques qui présentent des points critiques arbitrairement près de l'origine, la constante C de la page 68 est arbitrairement grande; or l'égalité (3) de la page 68 montre que, lorsque $|C|$ croît indéfiniment, une caractéristique w issue de x_1 avec la valeur o

tend (en un point quelconque $\bar{x}$), soit vers w_1, soit vers w_2. De cette remarque il résulte, par continuité, que, *si* μ_1 *et* $|x_1|$ *sont suffisamment petits, les valeurs initiales* $(\bar{z}, \bar{\bar{z}})$ *au point* $\bar{x}$ *des deux caractéristiques que nous étudions sont respectivement voisines de* $w_1\bar{x}$ *et* $w_2\bar{x}$.

Considérons, par exemple, la *seconde* caractéristique et posons

$$\zeta = \frac{z^2}{x^2} = w_2^2 + u. \tag{27}$$

Tous les résultats obtenus aux pages 114-118 subsisteront ici sans modifications. L'équation (4) se transforme en l'équation (12) et la branche d'intégrale u de cette dernière équation, qui prend au point $\bar{x}$ une valeur initiale $\bar{u}$ voisine de zéro, est développable (dans une couronne circulaire) par rapport aux puissances de x et de hx^{λ_1} [développement (14)]. Plus précisément, *on peut déterminer un nombre* H *et des nombres* r', r'' (*inférieurs au rayon de* Γ) *tels que* (*quel que soit* $|\mu|$ *compris entre* o *et* 1) *le développement* (14) (*où l'on fait* $\nu = 1$) *représente une fonction holomorphe de* x *et* hx^{λ_1} *pour* $r' < |x| < r''$ *et* $|h| < \mathrm{H}$.

Lorsque h n'est pas nul, les caractéristiques z définies par le développement (14) sont différentes de zéro à l'origine. Mais, pour $h = 0$, nous obtenons une intégrale U à laquelle correspond *une intégrale particulière* Z_1 *de l'équation* (4), *nulle et holomorphe à l'origine*. D'ailleurs, lorsque $|h|$ tend vers o, la limite inférieure r' de la couronne circulaire où converge le développement (14) tend évidemment vers o; on voit ainsi que, pour $h = 0$, les points critiques situés sur les caractéristiques Z_1 (issues de o avec la valeur o) viennent se confondre en $x = 0$. Si maintenant, partant de $\bar{x}(r' < |\bar{x}| < r'')$ avec une valeur initiale $\bar{u}$ voisine [1] de $\mathrm{U}(\bar{x})$, nous tournons indéfiniment dans un sens convenable sur la circonférence de centre o et de rayon $|\bar{x}|$, nous obtenons au point $\bar{x}$ une infinité de déterminations nouvelles qui convergent vers $\mathrm{Z}_1(\bar{x})$ (*cf.* p. 117).

---

[1] Cette hypothèse revient à supposer que le point critique x_1 (d'où nous sommes partis à la p. 126) est suffisamment voisin de l'origine.

On obtiendrait des résultats analogues pour la *première* caractéristique ζ issue du point x_1 avec la valeur o. Posant $\zeta = w_1^2 + t$, on trouverait que *cette caractéristique* (ou la caractéristique t correspondante) *est développable* (*dans une couronne circulaire de centre* O) *par rapport aux puissances de x et cx^{λ_1}* [développement (19), où l'on fait $\nu = 1$]. Pour $c = 0$, le développement obtenu donne une intégrale T à laquelle correspond une seconde intégrale particulière Z de l'équation (4) nulle et holomorphe à l'origine. Si, d'autre part, à partir d'une valeur initiale $\bar{t}$ de t voisine de $T(\bar{x})$, on tourne indéfiniment dans un sens convenable sur la circonférence de centre o et de rayon $|\bar{x}|$, on obtient au point $\bar{x}$ une nouvelle infinité de déterminations qui convergent vers $Z(\bar{x})$.

Une fois obtenus les développements (14) et (19) (où l'on fait $\nu = 1$), nous reviendrons aux points critiques présentés dans le cercle Γ de centre o par l'ensemble des caractéristiques z issues de l'origine avec une valeur initiale a voisine de o. Nous avons vu (p. 126) que ces points critiques sont au nombre de deux lorsque le paramètre μ est inférieur à un certain nombre μ_1. En raisonnant comme à la page 117, nous démontrerons que, *quel que soit* μ *entre* o *et* 1, *le nombre de ces points critiques est toujours* 2 *à condition que a soit intérieur à une certaine aire Δ entourant $a = 0$.*

Cela dit, il nous sera facile de déterminer le mécanisme des permutations qui s'opèrent au voisinage de l'origine pour une branche d'intégrale z. *Ce mécanisme est exactement celui qui a été décrit aux pages* 68-70. Soit $\bar{x}$ un point voisin de o. Les déterminations de z obtenues en ce point forment une série unilinéaire

$$\ldots, \quad \bar{z}_{-1}, \quad \bar{z}_0, \quad \bar{z}_1, \quad \ldots,$$

et à chaque détermination $\bar{z}_j$ correspondent deux points critiques x_{j-1}, x_j qui le permutent respectivement avec $\bar{z}_{j-1}$ et $\bar{z}_{j+1}$. Nous en concluons (*voir* p. 95) que, dans les conditions où nous sommes placés, L'ORIGINE EST, POUR L'ÉQUATION (4), UN POINT TRANSCENDANT DE PREMIÈRE ESPÈCE, DE LA PREMIÈRE SORTE ET DU PREMIER TYPE.



CHAPITRE V.

RELATIONS ENTRE LES SINGULARITÉS TRANSCENDANTES D'UNE MÊME ÉQUATION.

Je ne puis consacrer que quelques pages à ce problème, qui cependant, dans une étude plus complète, devrait occuper une place prépondérante. En effet, si nous voulons rester fidèles aux principes formulés dans l'Introduction de ce Livre, nous ne devons pas nous contenter d'étudier les intégrales d'une équation au voisinage d'une singularité transcendante isolée (quelle que soit l'extension donnée à ce voisinage, dans lequel nous avons compris un ensemble infini de points critiques algébriques). Il nous faut étudier les intégrales dans tout le plan et, avant tout, nous demander si les ensembles de permutations opérées au voisinage des diverses singularités transcendantes d'une même équation sont des ensembles indépendants ou, au contraire, des ensembles liés par certaines relations.

Voulant arriver tout de suite à des résultats précis, je me contenterai d'examiner un type d'équation particulier, l'équation

$$(1) \qquad 2y' + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0,$$

où A_3 est un *polynome de degré deux*.

On se rappelle qu'au Chapitre II nous avons fait une étude spéciale de l'équation (1) au point de vue de la croissance de ses intégrales, et que nous avons été conduits à distinguer deux cas suivant que les degrés m_2 et m_3 de A_2 et A_3 satisfont à l'une ou à l'autre des deux inégalités $m_3 > 2m_2 + 1$, $m_3 < 2m_2 + 1$. Or, précisément, il va se trouver que la distinction de ces deux cas, suggérée par des considérations d'un ordre tout différent, a une importance capitale dans notre problème actuel. *Tandis que pour* $m_2 = 0$ *les singularités transcendantes de l'équation* (1) (*où* $m_3 = 2$) *sont*

liées entre elles par une relation invariante, ces singularités sont indépendantes lorsque $m_2 > 0$.

I. — *L'équation* $2y' + y^2 + ax(x-\alpha)y^3 = 0$.

En premier lieu, faisons dans l'équation (1) $m_2 = 0$ avec $m_3 = 2$. En effectuant au besoin un changement de variables de la forme

$$(x,\ x + \text{const.}), \qquad (y,\ y \times \text{const.}),$$

nous ramènerons l'équation (1) à la forme

$$2y' + y^2 + ax(x-\alpha)y^3 = 0 \tag{2}$$

ou

$$y = z^{-1}, \qquad 2zz' = z + ax(x-\alpha). \tag{3}$$

Nous allons nous demander de quelle nature sont les singularités transcendantes de l'équation (3) suivant les valeurs de a et α.

Appelons λ'_1, λ'_2 et λ''_1, λ''_2 les quantités λ_1, λ_2 qui, d'après le Chapitre IV (p. 107), sont respectivement associées aux singularités 0 et α, et cherchons à calculer ces quantités.

Pour calculer λ'_1 et λ'_2 on doit prendre les racines w_1 et w_2 de l'équation

$$-2w^2 + w - a\alpha = 0,$$

puis poser

$$\lambda'_1 = -2 + \frac{1}{2w_1}, \qquad \lambda'_2 = -2 + \frac{1}{2w_2}.$$

Il en résulte que λ'_1 et λ'_2 sont les racines de l'équation

$$4a\alpha(\lambda+2)^2 - 2(\lambda+2) + 2 = 0$$

ou

$$4a\alpha\lambda^2 + (16a\alpha - 2)\lambda + 16a\alpha - 2 = 0. \tag{4}$$

On vérifierait de même que λ''_1 et λ''_2 sont les racines de

$$4a\alpha\lambda^2 + (16a\alpha + 2)\lambda + 16a\alpha + 2 = 0. \tag{5}$$

Si nous comparons maintenant les équations (4) et (5), nous obtenons les relations

$$\lambda'_1\lambda'_2 + \lambda''_1\lambda''_2 = 8, \qquad \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda''_1 + \lambda''_2 = -8, \tag{6}$$

relations invariantes qui expriment la dépendance réciproque des deux singularités transcendantes $x = 0$ *et* $x = \alpha$.

De ces relations (6) nous allons déduire diverses conséquences, et tout d'abord celle-ci : *des deux points singuliers* o *et* α, *l'un au moins est un point indirectement critique.*

Pour établir ce point, je montrerai que si l'on a $\mathcal{R}(\lambda'_1) > 0$, et, par suite (p. 107), $\mathcal{R}(\lambda'_2) < 0$, on a nécessairement $\mathcal{R}(\lambda''_1) < 0$, $\mathcal{R}(\lambda''_2) < 0$.

Vérifions-le pour λ''_1. Nous savons que

$$\frac{1}{\lambda'_1} + \frac{1}{\lambda'_2} = -1, \qquad \frac{1}{\lambda''_1} + \frac{1}{\lambda''_2} = -1.$$

Remplaçons alors, dans (6), λ'_2 et λ''_2 par leurs valeurs en fonction de λ'_1, λ''_1 : nous obtenons

$$-\frac{\lambda'^2_1}{\lambda'_1+1} - \frac{\lambda''^2_1}{\lambda''_1+1} = 8 \qquad \text{ou} \qquad -\lambda'_1 - \frac{1}{\lambda'_1+1} - \lambda''_1 - \frac{1}{\lambda''_1+1} = 6,$$

et nous vérifions aisément qu'il est impossible que cette égalité soit satisfaite si les parties réelles de λ'_1 et λ''_1 sont toutes deux positives. Nous en concluons que l'un au moins des deux points o et α est indirectement critique ([1]).

Il y aurait un intérêt particulier à savoir déterminer toutes les équations (3) telles que les quantités λ'_1, λ'_2, λ''_1, λ''_2 correspondant à ces équations soient *réelles* et *rationnelles*. C'est en ce cas, en effet, que les singularités transcendantes sont susceptibles de se réduire à des singularités algébriques ou à des points d'holomorphisme. Voyons comment se posera le problème :

Il est clair que les quantités λ seront rationnelles en même temps que les racines de l'équation en w correspondantes. Or ces racines seront :

$$\text{Pour la singularité } x = 0 \ldots \quad w = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8a\alpha}}{4}$$

$$\text{Pour la singularité } x = \alpha \ldots \quad w = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8a\alpha}}{4}$$

Pour que ces quatre racines soient rationnelles, il faut et il suffit

---

([1]) Il ne saurait, par suite, y avoir à distance finie plus d'un point où se coupent une infinité d'intégrales de (3).

que les quantités $(1 - 8a\alpha)$ et $(1 + 8a\alpha)$ soient toutes deux des carrés de nombres rationnels. Déterminer $a\alpha$ de manière à satisfaire aux conditions voulues revient donc *à trouver deux nombres rationnels carrés dont la somme soit* 2.

C'est là un problème connu, qui admet une infinité de solutions. Considérons l'une quelconque de ces solutions. Par exemple, prenons pour valeurs de $1 - 8a\alpha$ et $1 + 8a\alpha$ les deux carrés $\frac{1}{25}$ et $\frac{49}{25}$ dont la somme est 2. Nous devons, pour cela, faire $a\alpha$ égal à $\frac{3}{25}$; nous donnerons, par exemple, à α la valeur 3 et à a la valeur $\frac{1}{25}$. Alors l'équation (3) deviendra

$$2zz' = z + \frac{1}{25}x(x - 3),$$

équation qui se transformera par le changement de variable $\left(z, \frac{z}{5}\right)$ en

$$(7) \qquad 2zz' = 5z + x(x - 3).$$

Pour cette équation, les quantités que nous avons appelées respectivement w_1, w_2, λ_1, λ_2 sont à l'origine

$$w_1 = 1, \qquad w_2 = \frac{3}{2}, \qquad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{3}.$$

Posant $z = x\sqrt{1 + t}$ et $z = x\sqrt{\frac{9}{4} + u}$, nous ramènerons (p. 114 et 119) l'étude des intégrales de (7), qui sont nulles à l'origine, à l'étude des deux équations

$$xt' = \frac{1}{2}t + x + \ldots,$$

$$xu' = -\frac{1}{3}u + x + \ldots.$$

Il y a une infinité d'intégrales nulles à l'origine, lesquelles admettent l'origine comme *point critique algébrique* permutant deux déterminations.

Au point $x = 3$ (point indirectement critique), les quantités w_1,

w_2, λ_1, λ_2 sont

$$w_1 = 3, \qquad w_2 = -\frac{1}{2}, \qquad \lambda_1 = -\frac{7}{6}, \qquad \lambda_2 = -7.$$

On prévoit que l'équation (7) jouit de propriétés remarquables. Mais de ces propriétés mêmes nous allons déduire que l'équation (7) est intégrable, en sorte qu'elle ne définit pas de transcendantes nouvelles.

Je dis d'abord que l'équation (7) admet deux intégrales particulières algébriques. En effet, si l'on pose $x = \xi^2$, l'équation (7) devient

$$(8) \qquad z\frac{dz}{d\xi} = 5\xi\sqrt{z} + \xi^3(\xi^2 - 3),$$

équation qui est vérifiée si l'on fait

$$(9) \qquad z = P = \frac{1}{\sqrt{3}}\xi^2(\xi + \sqrt{3}), \qquad z = P_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}\xi^2(\xi - \sqrt{3}).$$

De l'existence de ces deux intégrales nous déduirons *a priori* que l'on peut faire un changement de variable

$$v = Hz + G$$

(H et G étant des fonctions rationnelles de ξ) tel que la fonction multiforme ξ de v soit une fonction à points critiques fixes. Déterminons, en effet, la variable v de manière que, pour z égal à l'une des intégrales polynomales (9), v soit égal à une constante, ce qui revient à déterminer H et G par les deux égalités

$$\begin{aligned} HP + G &= c, \\ HP_1 + G &= c_1. \end{aligned}$$

La fonction v se trouve satisfaire à une équation différentielle de la forme $\frac{dv}{d\xi}$ = fonction rationnelle de ξ et v.

Dès lors, pour que la fonction ξ de v eût des points critiques mobiles, il faudrait qu'il existât des intégrales z qui, pour des valeurs mobiles de v, satisfissent à l'égalité

$$(10) \qquad \frac{dv}{d\xi} = H'z + G' + H\frac{dz}{d\xi} = 0,$$

en même temps d'ailleurs qu'à l'égalité (8). Mais les équations (8) et (10), considérées comme système d'équations linéaires simultanées déterminant z et $\frac{dz}{d\xi}$, n'admettent que deux solutions. Et, puisque nous connaissons déjà les solutions $z = P$, $z = P_1$ (correspondant aux valeurs fixes c et c_1 de v), nous pouvons affirmer qu'il n'y en a pas d'autres. Ainsi la fonction $\xi(v)$ est une fonction à points critiques fixes : par suite, l'équation différentielle qui la définit est nécessairement une équation linéaire ou une équation de Riccati (*comparer* la démonstration de la page 22).

Pratiquement, pour transformer l'équation (8) en une équation à points critiques fixes, il suffira de poser

$$v = \frac{-z\sqrt{3}}{\xi^2} + \frac{\xi + \sqrt{3}}{\xi}.$$

On trouvera que ξ est défini en fonction de v par l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d\xi}{dv} = \frac{1 - v}{3v(v-2)}\xi + \frac{1}{\sqrt{3}\, v(v-2)},$$

équation qui donne v par l'inversion d'une intégrale abélienne.

Avant d'aller plus loin faisons quelques remarques sur les branches d'intégrales de l'équation (8) voisines de P et P_1.

Entourons le point $\xi = \sqrt{3}$ d'un petit cercle γ (ne contenant pas l'origine), puis plaçons-nous en un point $\bar{\xi}$ du contour de ce cercle et posons

$$b_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}\bar{\xi}^2(\bar{\xi} - \sqrt{3}).$$

Je dis que, *si b est suffisamment voisin de b_0, une caractéristique quelconque de* (8) *issue de $\bar{\xi}$ avec la valeur initiale b n'admet, en dehors du cercle γ, aucun point critique à distance finie.*

En effet, d'après les lois de continuité, l'ensemble des caractéristiques égales à b au point $\bar{\xi}$ est, pour b voisin de b_0, une fonction holomorphe de b en tout point du plan des ξ, excepté peut-être au voisinage des points $\xi = 0$, $\xi = \sqrt{3}$ qui annulent

l'intégrale polynomale P_1 (pour laquelle $b = b_0$). Mais nous savons (p. 132) que l'équation (8) possède une infinité de branches d'intégrales qui sont toutes nulles et holomorphes à l'origine ([1]). Ces branches sont fonctions holomorphes d'un certain paramètre C (*cf.* p. 124); je supposerai que l'on ait pris comme paramètre C la valeur des branches d'intégrales en un point fixe $\bar{\xi}'$, voisin de l'origine, situé par exemple sur le segment $\bar{\xi}$o (on choisira $\bar{\xi}$ de manière que $\bar{\xi}$o ne traverse pas le cercle γ décrit autour du point $\sqrt{3}$). Si nous appelons alors C_0 la valeur $P_1(\bar{\xi}')$, les caractéristiques issues de $\bar{\xi}'$ avec des valeurs C voisines de C_0 seront toutes nulles et holomorphes à l'origine. Considérons maintenant les caractéristiques issues de $\bar{\xi}$ avec la valeur initiale b. En un point quelconque de $\bar{\xi}$o, ces caractéristiques sont fonctions holomorphes de b pour b voisin de b_0. Donc C est fonction holomorphe de b pour b voisin de b_0; donc, encore, les caractéristiques dont la valeur initiale b est suffisamment voisine de b_0 prennent en $\bar{\xi}$o une valeur voisine de C_0 et *sont nulles et holomorphes à l'origine*. On en conclut que l'ensemble des caractéristiques issues de $\bar{\xi}$ avec la valeur b ne présente pas de point critique au voisinage de l'origine, mais seulement dans le cercle γ.

Nous allons maintenant démontrer une importante propriété de l'équation générale (3). Nous écrirons cette équation sous la forme

$$(11) \qquad z\frac{dz}{d\xi} = 5\xi\sqrt{z} + 25a\xi^3(\xi^2 - \alpha),$$

après avoir effectué les changements de variables $\left(z, \frac{z}{5}\right)$, $x = \xi^2$.

Faisons varier avec continuité les paramètres a et α, de telle manière que l'origine continue à être un point directement critique [pour lequel $\mathcal{R}(\lambda_1) > 0$], tandis que les points $\xi = \pm\sqrt{\alpha}$ ne cessent pas d'être des points indirectement critiques.

L'équation (11) admet, comme on sait (p. 127-128), deux inté-

([1]) Si l'on fait $x = \xi^2$, ces branches sont données par l'équation en t

$$\xi t' = t + 2\xi^2 + \ldots.$$

grales nulles et holomorphes au point indirectement critique $\xi = \sqrt{\alpha}$. De ces deux intégrales, l'une, Z_1, est très voisine de P_1 lorsque a et α sont respectivement très voisins de 0,04 et 3. Suivons cette intégrale Z_1 le long d'un rayon quelconque issu du point $\sqrt{\alpha}$: nous obtenons un ensemble de caractéristiques (Z_1) qui ne sauraient (si a et α sont suffisamment voisins de 0,004 et 3) présenter des points critiques ailleurs qu'au voisinage de l'origine; je dis que *cet ensemble n'admet comme point critique que l'origine elle-même.*

En effet, nous savons (p. 119) que l'équation (11) a une infinité de caractéristiques (z) nulles à l'origine, fonctions holomorphes de x et de la quantité cx^{λ_1}. Ces caractéristiques (z) (lorsque $|c|$ est assez petit) ne présentent aucun point critique autre que l'origine dans un cercle δ de centre $x = 0$; elles sont par suite (d'après les lois de continuité) fonctions holomorphes de a et α en tout point de δ (l'origine exceptée). Soit, d'autre part, C la valeur d'une caractéristique (z) en un point $\bar{\xi}'$ intérieur à δ; la constante que nous appelons c se trouve être fonction continue et uniforme de C (*voir* p. 119, note 1). Posons, dès lors, $C_0 = P_1(\bar{\xi}')$: les caractéristiques (z) sont, dans le cercle δ, des fonctions continues des trois variables C, a, α pour C, a, α respectivement voisins de C_0, 0,04 et 3.

Soit maintenant $\bar{Z}_1$ la valeur en $\bar{\xi}'$ de la caractéristique Z_1 suivie le long du segment $\sqrt{\alpha}\,\bar{\xi}'$. Pour a et α voisins de 0,04 et 3, $\bar{Z}_1$ est voisin de C_0. Donc la caractéristique issue de $\bar{\xi}'$ avec la valeur $\bar{Z}_1$, et suivie le long de $\bar{\xi}'0$, est une des caractéristiques que nous avons appelées (z). En d'autres termes, l'ensemble des caractéristiques (Z_1) présente à l'origine un *point directement critique isolé,* ainsi que nous l'avions annoncé.

La démonstration qu'on vient de lire suppose a et α voisins de 0,04 et 3, soit $|a - 0{,}04| < \sigma$ et $|\alpha - 3| < \sigma_1$. Mais, une fois ce résultat obtenu, nous pouvons répéter la même démonstration (¹) au

(¹) Soit a_1, α_1 un système de valeurs a et α pour lequel la proposition soit démontrée, et soit R_1 l'intégrale Z_1 correspondante. Il suffira de faire $C_0 = R_1(\bar{\xi}')$ dans la démonstration précédente pour que cette démonstration s'applique au voisinage des valeurs a_1 et α_1 de a et α.

voisinage de $|a - 0,04| = \sigma$, $|\alpha - 3| = \sigma_1$. Nous constatons ainsi que la proposition énoncée ne cesse pas d'être vraie tant que a et α restent dans un certain domaine : *parmi les deux intégrales de l'équation* (11) *qui sont nulles et holomorphes au point* $\sqrt{\alpha}$, *l'une,* Z_1, *est telle que l'ensemble des caractéristiques* (Z_1) *issues de* $\sqrt{\alpha}$ *avec la valeur* 0 *ne présente, dans tout le plan, d'autre point critique que l'origine.*

En nous appuyant sur ce théorème, nous pouvons répéter, à propos de l'équation (11), les remarques que nous avons faites plus haut sur l'équation (8). Traçons autour du point $\sqrt{\alpha}$ un petit cercle γ ne contenant pas l'origine; appelons $\bar{\xi}$ un point du contour γ et posons $b_0 = Z_1(\bar{\xi})$. Le raisonnement exposé à la page 135 permettra d'établir la proposition suivante : *Si b est suffisamment voisin de b_0, une caractéristique quelconque de* (11) *issue de* $\bar{\xi}$ *avec la valeur initiale b n'admet, en dehors du cercle* γ, *aucun point critique autre que l'origine.*

Ce qui fait l'intérêt de cette proposition, c'est qu'elle établit une corrélation entre les diverses singularités transcendantes des intégrales de l'équation (11).

Nous savons en effet (p. 190) que si, partant du point $\bar{\xi}$ du contour γ avec une valeur b voisine de b_0, nous voulons opérer la série unilinéaire de permutations qui définit le point $\sqrt{\alpha}$ comme point de première espèce de la première sorte, nous devons décrire une suite de tours le long du contour γ.

Or, faisons le changement de variable $\xi = \sqrt{\alpha}\,\chi^{-1}$ qui transforme le cercle γ en un cercle G de très grand rayon, et les points $\xi = 0$, $\xi = \infty$ en $\chi = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, $\chi = 0$. Il résulte de la proposition énoncée plus haut que, si $\bar{\chi}$ est un point quelconque du contour G, l'ensemble des caractéristiques issues de $\bar{\chi}$ avec la valeur b ne présente aucun point critique en dehors des points $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ et 0. Par conséquent, *décrire à partir de $\bar{\chi}$ le contour du cercle* G *équivaut à décrire un lacet fermé quelconque autour des deux points* $\chi = 0$ *et* $\chi = \alpha^{-\frac{1}{2}}$.

Revenant à la variable ξ, nous énoncerons ainsi cet important

résultat : *Les permutations opérées autour de la suite de points critiques algébriques qui converge vers le point indirectement critique $\sqrt{\alpha}$ équivalent aux permutations opérées autour des deux points directement critiques $\xi = 0$ et $\xi = \infty$.*

Le résultat ainsi obtenu n'étant pas altéré par le changement de variable $x = \xi^2$, nous pouvons l'appliquer à l'équation (3) en remplaçant ξ par x et $\sqrt{\alpha}$ par α.

II. — *L'équation* $2y' + A_2(x)y^2 + ax(x-\alpha)y^3 = 0$.

Passons maintenant au cas où le coefficient A_2 de l'équation (1) a un degré positif (A_3 étant toujours de degré 2). J'ai dit que, dans ces conditions, il n'y a plus de relation invariante entre les diverses singularités transcendantes de l'équation (1). C'est ce dont nous allons nous rendre compte.

Je supposerai, pour fixer les idées, A_2 du *premier degré*. Les conclusions auxquelles je parviendrai dans ce cas s'appliqueront *a fortiori* lorsque le degré de A_2 sera plus élevé.

En posant $y = z^{-1}$ et faisant au besoin le changement de variables $(x, x + \text{const.})$, $(y, y \times \text{const.})$, on mettra l'équation proposée sous la forme

$$2zz' = (1 + \beta x)z + ax(x-\alpha). \tag{12}$$

Je vais montrer que *l'on peut disposer de β de manière que les points $x = 0$ et $x = \alpha$ soient des singularités de types assignés à l'avance.*

Cherchons encore à calculer les valeurs λ'_1, λ'_2 et λ''_1, λ''_2 des paramètres λ_1, λ_2 relatifs aux deux points 0 et α.

Les quantités λ'_1 et λ'_2 sont données, comme au paragraphe I, par l'équation (4) de la page 130. Quant aux quantités λ''_1, λ''_2, elles sont évidemment égales à celles que fournirait l'équation

$$2zz' = (1 + \beta\alpha)z + a\alpha(x-\alpha).$$

Or, cette dernière équation se transforme, par le changement de variable $z = (1+\beta\alpha)\omega$, en

$$2\omega\omega' = \omega + \frac{a\alpha}{(1+\beta\alpha)^2}(x-\alpha),$$

d'où l'on conclura que λ''_1 et λ''_2 vérifient l'équation algébrique

$$(13)\qquad \frac{4a\alpha}{(1+\beta\alpha)^2}\lambda^2+\left[\frac{16a\alpha}{(1+\beta\alpha)^2}+2\right]\lambda+\frac{16a\alpha}{(1+\beta\alpha)^2}+2=0.$$

Les coefficients de cette équation n'étant liés aux coefficients de l'équation (4) par aucune relation invariante, il est clair que l'on pourra toujours disposer des paramètres a, α, β de manière à fixer arbitrairement le type des singularités o et α.

Soit par exemple (comme à la page 132) $a=\frac{1}{25}$, $\alpha=3$. Proposons-nous de déterminer β de manière que $\lambda''_1=\lambda'_1$ et $\lambda''_2=\lambda'_2$: il faudra évidemment et il suffira que nous prenions

$$(1+\alpha\beta)^2=-1 \qquad \text{ou} \qquad 3\beta=-1\pm i.$$

En particulier, faisons $\beta=-\frac{1}{3}+\frac{i}{3}$, auquel cas l'équation (12) se transforme par le changement de variable $\left(z, \frac{z}{5}\right)$ en l'équation

$$(14)\qquad 2zz'=\left(5-\frac{5-5i}{3}x\right)z+x(x-3).$$

La singularité o de l'équation (14) se comporte comme la singularité o de l'équation (7). On a $\lambda'_1=\frac{1}{2}$, $\lambda'_2=-\frac{1}{3}$, ce qui donne une infinité d'intégrales nulles pour $x=0$, lesquelles admettent l'origine comme point critique algébrique permutant deux déterminations (*voir* p. 132).

D'autre part, l'équation algébrique (13) [où $(1+\beta\alpha)^2=-1$] coïncide avec l'équation (4). On a donc

$$\lambda''_1=\lambda'_1=\frac{1}{2}, \qquad \lambda''_2=\lambda'_2=-\frac{1}{3},$$

et l'on en conclut que *la singularité* 3 *de l'équation* (14) *est du même type que la singularité* o.

L'équation (14) *jouit, dès lors, de cette propriété remarquable que ses intégrales ne présentent aucun point singulier transcendant à distance finie.* L'étude de cette équation semble devoir être, pour ce motif, particulièrement intéressante.

Nous venons de construire une équation (12) dont les singularités transcendantes dégénèrent en singularités algébriques. Il est clair que nous pourrions, tout aussi aisément, construire une équation (12) présentant deux points transcendants directement critiques. C'est là une circonstance qui ne saurait se présenter, nous l'avons vu, lorsque β est égal à zéro.



NOTE.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE DONT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE N'A QU'UN NOMBRE FINI DE BRANCHES,

PAR M. PAUL PAINLEVÉ.

Propriétés générales des équations différentielles du premier ordre.

1. Soit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \qquad (1)$$

(P et Q polynomes en x, y)

une équation du premier ordre et du premier degré.

THÉORÈME I. — *Une intégrale $y(x)$ de l'équation* (1) *ne saurait présenter, dans le plan des x, de points singuliers non algébriques, en dehors de certains points fixes ξ en nombre fini, qui peuvent être déterminés algébriquement en fonction des coefficients de* P *et* Q.

Ce théorème a été démontré dans le corps de l'Ouvrage, et les points ξ ont été énumérés (p. 15-17).

2. Soit maintenant $y = \varphi(x, y^0, x^0)$ l'intégrale qui pour $x = x^0$ prend la valeur y^0. Considérons, dans le plan des x, deux points fixes (¹) $\overline{x^0}$ et $\overline{x}$ arbitrairement choisis, mais distincts des points ξ, et un chemin quelconque L joignant ces deux points et assujetti à la seule condition de ne passer par aucun des points ξ. Prolon-

(¹) Je représenterai par $\overline{x}$ (ou $\overline{x^0}$, etc.) une valeur *fixe* de la variable x (ou x^0, etc.).

geons analytiquement, le long de L, la fonction $y(x) = \varphi(x, y^0, \overline{x^0})$ en laissant à y^0 une valeur constante égale à b ou voisine de b. Si nous rencontrons sur L un point critique (*algébrique*) de $y(x)$, nous adoptons, après avoir franchi ce point, une quelconque des valeurs de $y(x)$ qui se permutent autour de ce point. On arrive ainsi en $\overline{x}$ avec une certaine valeur $y = \varphi(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ qui dépend de y^0.

THÉORÈME II. — *L'expression $\varphi(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ coïncide avec une branche d'une fonction de y^0 algébroïde pour $y^0 = b$, quelle que soit la valeur b (finie ou infinie) considérée.*

Ce théorème se trouve démontré dans le corps de l'Ouvrage, par le raisonnement indiqué au début de la page 20 et page 33.

3. *Remarques sur le théorème II.* — Considérons la fonction $y = \varphi(x, y^0, \overline{x^0})$ et prolongeons-la analytiquement dans tout le champ des x et des y ($\overline{x^0}$ restant invariable). On peut être tenté de déduire du théorème II la conséquence que cette fonction ne saurait présenter dans le champ des y^0 des singularités non algébriques. Il importe de bien comprendre que *cette conclusion n'est pas exacte*.

Représentons par $Y(x)$ l'intégrale qui correspond aux conditions initiales ($x = \overline{x^0}$, $y = b$). Pour plus de clarté, supposons d'abord que $y(x)$ ait un nombre fini p de branches; traçons, dans le plan des x, entre $\overline{x^0}$ et $\overline{x}$, p chemins $L_1, \ldots, L_p$ de longueur finie, ne passant par aucun point ξ ni par aucun des points critiques de $Y(x)$, et tels qu'on arrive en $\overline{x}$ sur ces p chemins avec les p valeurs $Y_1, \ldots, Y_p$. Si l'on donne à y^0 des valeurs voisines de b, l'intégrale $y(x)$ définie par les conditions ($x = \overline{x^0}, y = y^0$) prend, en $\overline{x^0}$, p valeurs $y_1, \ldots, y_p$ voisines de $Y_1, \ldots, Y_p$ quand x varie de $\overline{x^0}$ en $\overline{x}$ sur les p chemins $L_1, \ldots, L_p$. La fonction $y = \varphi(x, y^0, \overline{x^0})$ a donc au moins p branches, soit $y = \varphi_1, \ldots$. $y = \varphi_p$, qui, d'après le théorème II, sont algébroïdes pour $y^0 = b$. Mais si l'intégrale considérée $y(x)$, voisine de $Y(x)$, a plus de p branches, la fonction $y = \varphi(x, y^0, \overline{x^0})$ a d'autres branches, soit

$y = \varphi_{p+1}(x, y^0, x^0)$, ..., qui peuvent admettre $y^0 = b$ comme point singulier transcendant.

Montrons-le immédiatement sur un exemple.

4. *Étude d'un exemple particulier.* — L'équation

$$y' = \frac{y}{x(y+1)} \tag{2}$$

a son intégrale générale définie par la relation

$$ye^y = \frac{x}{x^0} y^0 e^{y^0} = Cx \qquad \text{(C constante arbitraire)}. \tag{3}$$

Les points ξ de l'équation (2) sont $x = 0$ et $x = \infty$. Elle admet l'intégrale particulière $y = 0$; sa transformée en $z = \frac{1}{y}$ admet l'intégrale $z = 0$. Toute autre intégrale $y(x)$ ne peut devenir nulle ou infinie en dehors des deux points $x = 0$ et $x = \infty$. Enfin, aux points critiques mobiles (algébriques) de $y(x)$, la fonction est égale à -1. D'après (3), une intégrale $y(x)$ n'a donc, en dehors du point $x = 0$, qu'un point critique à distance finie, à savoir le point $x = -\frac{x^0}{y^0} e^{-(y^0+1)}$, et autour de ce point deux branches seulement se permutent.

La relation (3), qui définit les intégrales $y(x)$, peut s'écrire

$$y + \log y = \log x + \text{const.}; \tag{4}$$

quand x tend vers zéro, y tend vers zéro ou l'infini ; or, l'équation (3) en y n'admet qu'une racine $y(x)$ tendant vers zéro avec x et cette racine est holomorphe pour $x = 0$. Chaque intégrale $y(x)$ admet donc une branche et une seule holomorphe pour $x = 0$ et toutes ses autres branches (en nombre infini) deviennent infinies pour $x = 0$, comme $\log x$, et admettent ce point comme point critique transcendant; quant au point $x = \infty$, c'est un point singulier transcendant de *toutes* les branches de $y(x)$, et ces branches deviennent infinies en ce point comme $\log x$.

Étudions maintenant y comme fonction de y^0, en laissant à x et x^0 des valeurs invariables; la fonction $y = \psi(y^0)$ ainsi définie est une fonction à une infinité de branches qui admet les points $y^0 = 0$, $y^0 = \infty$ comme *points singuliers transcendants.*

En effet, l'intégrale générale $y(x)$ peut s'écrire $y = \varphi(Cx)$, où $C = \frac{y^0 e^{y^0}}{x^0}$; il suit de là immédiatement que, pour $y^0 = 0$, une des branches et une seule de $\psi(y^0)$ est nulle et holomorphe; toutes les autres branches sont infinies, comme $\log y^0$, et admettent $y^0 = 0$ comme point critique transcendant. Pour ce qui est du point $y^0 = \infty$, on voit immédiatement que l'équation

$$(5) \qquad \begin{cases} y + \log y = y^0 + \log y^0 + \log \frac{x}{x^0} \\ \qquad\qquad = y^0 + \log y^0 + a, \qquad \left(a = \log \frac{x}{x^0}\right) \end{cases}$$

admet une solution $y = f(y^0, a)$ et une seule (1) méromorphe pour $y^0 = \infty$ (et infinie comme y^0); toutes les autres branches de $\psi(y^0, a)$ ont $y^0 = \infty$ comme point critique transcendant.

Ce résultat s'explique d'après la remarque du n° 3. L'intégrale $Y(x)$ définie par $(x = x^0,\ y = 0)$ est $Y = 0$; elle n'a qu'une branche. La fonction $y = \varphi(x, y^0, \overline{x^0})$ a donc au moins une branche algébroïde pour $y^0 = 0$, mais toutes les autres peuvent admettre et admettent en fait $y^0 = 0$ comme point singulier transcendant. Une remarque analogue s'applique à l'intégrale $y \equiv \infty$, ou $z = \frac{1}{y} \equiv 0$, définie par $(x = x^0, y = \infty)$.

---

(1) On montre aisément que s'il existe une racine $y = f(y^0, a)$ de (5), algébroïde pour $y_0 = \infty$, cette racine est de la forme

$$y = A y^0 + B + \frac{C}{y^0} + \frac{D}{y_0^2} + \ldots.$$

Quand on remplace, dans (5), y par ce développement, les coefficients A, B, C se calculent successivement sans ambiguïté :

$$A = 1, \qquad B = a, \qquad C = -a, \qquad \ldots.$$

Comme, d'autre part, nous savons (n° 3) qu'une au moins des valeurs de $y = \psi(y^0, a)$ est algébroïde pour $y^0 = \infty$, le développement précédent est sûrement convergent. On peut, d'ailleurs, le vérifier par la méthode des fonctions majorantes.

Remarquons que a ou $\log \frac{x}{x^0}$ admet une infinité de valeurs, différant entre elles de $2ni\pi$ (n entier positif ou négatif); la branche $y = \psi\left(y^0, \log \frac{x}{x^0}\right)$, méromorphe pour $y^0 = \infty$, admet dans le champ des x une infinité de valeurs se permutant autour du point fixe $x = 0$.

Nous reviendrons plus loin sur cet exemple. Remarquons seulement que, quand y^0 tend vers o (x^0 restant fixe, égal à 1 par exemple), le point critique mobile de $y(x)$, à savoir : $x = -\frac{1}{y^0} e^{-(1+y^0)}$ tend vers l'infini, c'est-à-dire ici vers un point ξ. Quand y^0 tend vers l'infini, ce point critique devient complètement indéterminé.

Cet exemple suffit à montrer la nécessité d'approfondir les particularités de la fonction $y = \varphi(x, y^0, \overline{x^0})$ dans le champ des y^0. Nous traiterons d'abord le cas particulier remarquable où l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction à n branches.

5. *Équations* (1) *dont l'intégrale générale* $y(x)$ *est une fonctions à n branches.*

Supposons, en premier lieu, que l'intégrale générale $y(x)$ soit *uniforme*. Soit $y(x, y^0, \overline{x^0})$ l'intégrale définie par les conditions initiales $(x = \overline{x^0}, y = y^0)$; la fonction $y(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ a une valeur unique pour $y^0 = b$, *que b soit fini ou infini,* et cette valeur est une fonction méromorphe de y^0 pour $y^0 = b$. La fonction $y = \varphi(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ est donc une fraction *rationnelle* en y^0. Si l'on permute le rôle de x et de x^0, on a évidemment $y^0 = \varphi(\overline{x^0}, y, \overline{x})$. La fraction rationnelle $y(y^0)$ est donc nécessairement du *premier degré.* L'équation (1), par suite, est une équation de Riccati.

Supposons maintenant que l'intégrale *générale* $y(x)$ soit une fonction à n branches; *par définition,* nous entendrons par là que *chaque* intégrale $y(x)$ *a exactement n* branches, exception étant faite peut-être pour certaines intégrales formant un ensemble *dénombrable.*

Soit c une quelconque des valeurs de y^0 telles que l'intégrale $y(x, y^0, \overline{x^0})$ ne soit pas une fonction de x à n branches.

Représentons par E l'ensemble [1] de ces points c dans le plan

---

[1] Soit n' le nombre de branches de l'intégrale $y(x, c, \overline{x^0})$; n' est nécessairement moindre que n. Car si $n' > n$, l'intégrale $y(x, y^0, \overline{x^0})$ admettrait au moins n' branches pour *toutes* les valeurs y^0 voisines de c. Un raisonnement analogue montre que tout point limite y^0 des points c est aussi un point c; autrement dit, l'ensemble dénombrable E est *fermé;* il renferme son ensemble *dérivé.* Mais ces remarques ne sont pas indispensables au raisonnement qui suit. Ce raison-

des y^0. Si b n'est pas un point de cet ensemble, l'intégrale $y(x, y^0, \overline{x^0})$, pour y^0 égal à b ou voisin de b, est une fonction de x à n branches, soit les branches $y_1, \ldots, y_n$. Les combinaisons symétriques

$$\sum_{j=1}^{i=n} y_j, \quad \sum y_j y_l, \quad \ldots, \quad y_1 y_2 \ldots y_n,$$

ont une valeur *unique* (x gardant une valeur distincte des ξ) en tout point b du plan des y^0 qui ne fait pas partie de l'ensemble E, et cette valeur est une fonction méromorphe de y^0 pour $y^0 = b$. Si donc l'expression *uniforme* $\sum y_j = \psi(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ présente des singularités non polaires, ces points singuliers font partie de l'ensemble *dénombrable* E, et par suite, d'après un théorème bien connu, il en est, soit le point $y^0 = \gamma$, qui sont *isolés*. Les mêmes remarques s'appliquant aux autres combinaisons symétriques, la fonction $y = \varphi(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ vérifie une relation de la forme

$$(1)\quad y^n + A_{n-1}(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})y^{n-1} + \ldots + A_1(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})y + A_0(\overline{x}, y^0, \overline{x^0}) = 0,$$

où les A_j sont des fonctions *uniformes* de y^0 qui, si elles ne sont pas algébriques, admettent au moins (à distance finie ou infinie) un point singulier isolé (point essentiel au sens de Weierstrass), soit le point $y^0 = \gamma$.

Mais si l'on permute le rôle de x et de x^0, on voit aussitôt que la fonction $y^0 = \varphi(\overline{x^0}, y, \overline{x})$, fonction définie par (1), vérifie aussi la relation

$$(2)\quad y_0^n + A_{n-1}(\overline{x^0}, y, \overline{x})y_0^{n-1} + \ldots + A_1(\overline{x^0}, y, \overline{x})y^0 + A_0(\overline{x^0}, y^0, \overline{x}) = 0,$$

ce qui est impossible, comme on sait [1], si les fonctions $A_j(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ (ou une d'entre elles) admettent un point singulier essentiel.

---

nement ne diffère pas d'ailleurs du raisonnement des pages 19-20 du texte. Mais je lui donne ici un peu plus de développement en vue de ce qui va suivre.

[1] La proposition élémentaire sur laquelle on s'appuie ici est la suivante : Soit $y(z)$ une fonction analytique de z définie par une relation

$$(3)\qquad y^n + A_{n-1}(z)y^{n-1} + \ldots + A_1(z)y + A_0(z) = 0,$$

où les A_j sont des fonctions uniformes de z dont une au moins admet $z = \gamma$

La fonction $y = \varphi(x, y^0, x^0)$ vérifie donc la relation

$$y^n + A_{n-1}(x, y^0, x^0)y^{n-1} + \ldots + A_1(x, y^0, x^0)y + A_0(x, y_0, x) = 0,$$

où les A_j *sont des fonctions rationnelles de* y^0 (et des fonctions *uniformes* de x et de x^0). *C'est une fonction algébrique de* y^0.

6. *Du rôle des points critiques fixes et des points critiques mobiles.*

Convenons de dire qu'un contour fermé C du plan des x *ne tourne pas autour d'un point fixe* ξ, si l'on peut le réduire à un point par une déformation continue sans rencontrer ce point ξ. Ceci revient à dire que l'angle du vecteur ξx avec l'axe réel positif reprend sa valeur initiale quand x parcourt une fois le contour C. Si, au contraire, cet angle s'augmente de $2m\pi$ (m entier positif ou négatif), on dit que le contour C tourne n fois autour du point ξ.

Cette définition admise [1], soient y_1 et y_2 deux branches d'une intégrale particulière $y(x)$ de l'équation (1); nous dirons que ces deux branches *se permutent autour des points critiques mobiles* si l'on peut passer d'une détermination à l'autre en faisant décrire à x un contour fermé *qui ne tourne autour d'aucun des points critiques fixes* ξ.

7. *Équations dont l'intégrale générale n'admet que n branches permutables autour des points critiques mobiles.*

Si l'intégrale générale $y(x)$ a ses points critiques fixes, soit L

---

comme point singulier essentiel isolé. *Il est impossible que la fonction inverse* $z(y)$ *soit une fonction à un nombre fini m de branches.*

En effet, (moyennant le changement éventuel de y en $y+h$, h désignant une constante), il est loisible de supposer que $A_0(z)$ admet $z = \gamma$ comme point essentiel et, d'autre part, que pour $y = 0$ les fonctions $z(y)$ a ses m valeurs régulières et distinctes de la valeur γ; pour y *voisin de zéro*, les m valeurs de $z(y)$ diffèrent donc de γ de quantités supérieures en module à une certaine quantité positive ρ. Or, on peut toujours donner à z *des* valeurs tendant vers zéro et telles que $A_0(z)$ tende vers zéro avec elles; pour ces valeurs, l'équation (3) en y a au moins une racine qui tend vers zéro; pour *des* valeurs y voisines de zéro, $z(y)$ aurait donc une valeur voisine de γ, donc plus de m valeurs ce qui est contre l'hypothèse.

(1) *Voir*, au sujet de cette définition, les nos 12, 13 et 14

un chemin allant de $\overline{x^0}$ en $\overline{x}$ sans passer par aucun point ξ; la valeur $y = \varphi(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ ainsi définie est une fonction partout méromorphe de y^0, donc une fraction rationnelle. On voit, comme au n° 5, qu'elle est du premier degré; l'équation (1) est une équation de Riccati.

Supposons maintenant que *chaque* intégrale $y(x)$ ait *exactement* n branches permutables autour des points critiques mobiles, sauf peut-être certaines intégrales formant un ensemble *dénombrable* et que nous appellerons *exceptionnelles*. Nous dirons, alors que l'intégrale *générale* admet n branches permutables autour des points critiques mobiles.

Soit, comme plus haut, $y^0 = c$ une des valeurs [1] pour lesquelles l'intégrale $y(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ est exceptionnelle et soit E l'ensemble des points c dans le plan des y^0. Pour toute valeur $y^0 = b$ *qui ne fait pas partie de l'ensemble* E, l'intégrale $y(x, b, \overline{x^0})$ admet n branches permutables autour des points critiques mobiles, soit les branches $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$; nous pouvons tracer, dans le plan des x, un chemin L joignant $\overline{x^0}$ et $\overline{x}$ (sans passer par aucun point ξ) et $(n-1)$ contours fermés partant de x pour y revenir sans tourner autour d'aucun point ξ, tels que $y(x, b, \overline{x^0})$ acquière en $\overline{x}$ sur ces chemins les n valeurs $Y_1, \ldots, Y_n$. Pour y^0 voisin de b, l'intégrale $y(x, y^0, \overline{x^0})$ prend en x, *sur les mêmes chemins*, n valeurs distinctes $y_1, \ldots, y_n$ voisines de $Y_1, \ldots, Y_n$, et ces n valeurs se permutent autour des points critiques mobiles. Les combinaisons symétriques

$$\sum_{j=1}^{j=n} y_j, \quad \sum y_j y_l, \quad \ldots, \quad y_1 \ldots y_n,$$

auront donc (le chemin L étant donné) une valeur bien déterminée pour toute valeur b (finie ou infinie) de y^0 qui ne fait pas partie de l'ensemble E, et cette valeur sera une fonction méromorphe de y^0 pour $y^0 = b$.

---

[1] On peut faire sur ces valeurs les mêmes remarques qu'à la page 145 (note). L'intégrale $y(x, c, \overline{x^0})$ ne peut avoir que $n' < n$ branches permutables autour des points critiques mobiles. De plus, l'ensemble E est fermé.

Dès lors, on peut répéter sans modification le raisonnement du n° 5. Les fonctions $A_j(x, y^0, x^0)$ sont nécessairement *rationnelles* en y^0; la seule différence est que ces fonctions ne sont plus, en général, uniformes en x ou en x^0. Il résulte évidemment de ce qui précède que leurs diverses branches sont holomorphes ou méromorphes en x et en x^0 lorsque x et x^0 diffèrent respectivement des valeurs ξ, mais elles peuvent admettre ces valeurs comme singularités transcendantes fixes, soit dans le plan des x, soit dans le plan des x^0 [1].

En définitive, *pour la classe d'équations considérée, la fonction* $y = \varphi(x, y^0, x^0)$ *est une fonction algébrique de* y^0, et les branches de cette fonction qui se permutent entre elles, quand on fait varier seulement y^0, correspondent à n branches d'intégrale $y(x)$ *permutables autour des points critiques mobiles.*

8. *Propriétés des équations précédentes.* — Les équations du numéro précédent, comme celles du n° 5, rentrent donc dans les équations dont l'intégrale générale $y(x)$ est une *fonction algébrique* de la constante arbitraire convenablement choisie. On a vu, dans le corps de l'Ouvrage (p. 19-25), que l'intégrale générale de l'équation (1) peut alors se définir par une relation de la forme

$$(\mathrm{I}) \qquad \lambda = \frac{y^n + L_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + L_1(x)y}{M_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + M_1(x)y + 1} = \frac{U(x, y)}{V(x, y)},$$

où λ désigne l'intégrale générale d'une équation de Riccati :

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{d\lambda}{dx} = G(x)\lambda^2 + H(x)\lambda + K(x),$$

les coefficients L_j, M_j, G, H, K désignant des fractions rationnelles en x.

---

(1) Par exemple, l'équation $y' = \frac{1}{x}$ a comme intégrale $y = y^0 + \log \frac{x}{x^0}$; $x = 0$ et $x = \infty$ sont points logarithmiques de $y = \varphi(x, y^0, x^0)$ ainsi que $x^0 = 0$ et $x^0 = \infty$. De même, l'équation $y' = -\frac{y}{x^2}$ a comme intégrale $y = y^0 e^{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^0}\right)}$; l'équation $y' = \frac{\alpha y}{x}$ a comme intégrale : $y = y^0\left(\frac{x}{x^0}\right)^\alpha$.

L'intégrale de l'équation (II) peut s'écrire :

$$\text{(II bis)} \qquad \lambda(x) = \frac{Cf + f_1}{C\varphi + \varphi_1} \qquad \text{(C constante arbitraire),}$$

les fonctions f, f_1, φ et φ_1 étant des fonctions bien déterminées et holomorphes de x dans le voisinage d'un point x^0 arbitrairement choisi en dehors des points ξ. Si l'on remplace λ par cette expression dans (I), toute intégrale $y(x)$ de (1) vérifie l'équation

$$\text{(I bis)} \qquad \frac{Cf + f_1}{C\varphi + \varphi_1} = \frac{U(x, y)}{V(x, y)}$$

pour une valeur convenable de C.

Considérons l'équation

$$\text{(III)} \qquad V\frac{\partial U}{\partial y} - U\frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

dont le premier membre est un polynome en y de degré $(2n - 2)$ au plus; soit $y = g(x)$ une de ses racines, et j son ordre de multiplicité (pour x quelconque).

Si $y = g(x)$ est en même temps une intégrale particulière de (1), l'égalité (I *bis*) admet, pour une valeur convenable de la constante C, la racine $y = g(x)$ comme racine d'ordre $j + 1$ (pour x arbitraire). Appelons *solution multiple d'ordre* $j + 1$, toute intégrale particulière $y = g(x)$ de (1) qui, pour une valeur convenable de la constante et pour x arbitraire, est racine d'ordre $j + 1$ de l'équation (I *bis*) en y. Une telle solution est nécessairement racine d'ordre j de l'équation (III) et, par suite, est une fonction algébrique de x. Les valeurs de la constante C qui correspondent aux solutions multiples seront dites *valeurs remarquables de* C.

Ceci posé, le coefficient différentiel de (1) étant $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, soient p et q les degrés en y de P et de Q, et soit ν le plus grand des nombres p et $q + 2$. Il est loisible (moyennant une transformation homographique effectuée sur y) de supposer $p = \nu$, $q = \nu - 2$, et c'est ce que nous ferons. On a démontré (p. 23-24) que ν *est exactement égal à* $2n$, *à moins qu'il n'existe des solutions multiples de* (1). Mais dans ce dernier cas, l'équation de Riccati (II) admet au moins une solution algébrique et se ramène aux quadra-

tures. La relation qui existe entre ν et n est alors :

$$\text{(IV)} \qquad \nu = 2n - \sum j,$$

$j+1$ désignant la multiplicité d'une des solutions multiples et la somme $\sum j$ étant étendue à *toutes* les solutions multiples.

S'il n'existe qu'*une seule valeur remarquable, soit* C_1, *de la constante,* désignons par λ_1 la solution correspondante de l'équation de Riccati (solution qui est nécessairement *rationnelle*) [1], et par l_1 le nombre des racines distinctes de l'équation (I) en y quand on y remplace λ par λ_1 (x étant arbitraire). La somme $\sum j$ est égale à $n - l_1$, donc au plus égale à $n-1$, et ν *est au moins égal à* $n+1$. La transformation $\mu(x) = \frac{1}{\lambda - \lambda_1}$ ramène l'équation (II) à une équation linéaire à coefficients rationnels.

S'il existe *deux valeurs remarquables* (mais deux seulement), soit C_1 et C_2, de la constante, désignons par λ_1 et λ_2 les intégrales correspondantes de l'équation de Riccati, par l_1 et l_2 le nombre des racines distinctes de l'équation (I) en y pour $\lambda \equiv \lambda_1$ et $\lambda \equiv \lambda_2$. On a

$$\nu = 2n - (n - l_1) - (n - l_2) = l_1 + l_2.$$

Comme il est loisible d'effectuer un changement homographique sur C, on peut toujours admettre que $C = 0$ et $C = \infty$ sont les deux valeurs remarquables de C et l'équation (I *bis*) peut alors s'écrire

$$\text{(V)} \quad C = u(x)[y - g_1(x)]^{i_1}[y - g_2(x)]^{i_2}\ldots[y - g_\nu(x)]^{i_q} \equiv S(x, y),$$

où les i sont des entiers positifs ou négatifs sans facteur commun. La somme des entiers i positifs est égale à n et celle des entiers i négatifs à $-n$.

S'il existe au moins trois valeurs remarquables de la constante, l'intégrale générale de (1) est nécessairement algébrique. Le nombre des valeurs remarquables de C et des solutions multiples de (1) est évidemment fini.

---

[1] En effet, si $\lambda_1(x)$ avait au moins deux branches, ces deux branches, d'après (II *bis*), correspondraient à deux valeurs distinctes de C qui seraient toutes deux remarquables.

9. Posons-nous d'après cela la question suivante :

Reconnaître si l'intégrale générale d'une équation (1) *donnée n'acquiert qu'un nombre donné n de branches autour des points critiques mobiles.*

La question (p. 24) se résout à l'aide d'un nombre fini d'opérations rationnelles, et si la réponse est affirmative, la méthode fournit explicitement les équations (I) et (II); l'équation (1) est ainsi ramenée rationnellement à une équation de Riccati.

Posons-nous maintenant la même question, mais *sans que le nombre n soit donné.*

Soit toujours

$$p = q + 2 = \nu.$$

L'entier n est au moins égal à $\frac{\nu}{2}$. On peut toujours reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations rationnelles, si l'entier n a une valeur inférieure ou égale à ν. Quand la réponse est négative, si l'intégrale jouit de la propriété étudiée, il existe au moins deux valeurs remarquables de la constante (puique ν est inférieur à $n+1$). S'il en existe au moins trois, l'intégrale de (1) est algébrique : écartons ce cas. S'il en existe deux seulement, l'intégrale peut se mettre sous la forme (V). Il est facile de reconnaître s'il en est ainsi.

En effet, on peut toujours décider, à l'aide d'un nombre *fini* d'opérations rationnelles, si l'intégrale d'une équation (1) donnée se laisse mettre sous la forme (V), où les i désignent des constantes numériques quelconques dont la somme est nulle. Il suffit d'exprimer que l'équation

$$\text{(VI)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\log S(x, y) + y'\frac{\partial}{\partial y}\log S(x, y) = 0$$

coïncide avec l'équation (1); or l'équation (VI) peut s'écrire

$$\frac{A_1(x, y) + y' A(x, y)}{B} = 0,$$

A et A_1 désignant deux polynomes en y, le premier de degré $\nu - 2$, le second de degré ν au plus, et B désignant un polynome de degré ν en y dont les racines sont les valeurs $y = g_k(x)$. Comme

on doit avoir

$$\frac{A_1}{A} \equiv -\frac{P}{Q},$$

le polynome A en y doit être divisible par le polynome Q en y de degré au moins égal; les deux polynomes ne diffèrent donc que par un facteur fonction de x seulement et qu'il est loisible de supposer égal à 1. Il suit de là que *la différentielle*

$$P\,dx - Q\,dy$$

admet un multiplicateur $\frac{1}{B}$, *où* B *est un polynome en* y *de degré* ν à racines simples.

On commencera donc par reconnaître (ce qui est facile) si un tel multiplicateur existe. S'il existe au moins deux tels multiplicateurs distincts (c'est-à-dire qui diffèrent autrement que par un facteur constant), leur quotient est une intégrale première de l'équation (1), et ce quotient est une fraction rationnelle en y de degré ν : l'entier n serait par suite égal à ν, ce qui est contre l'hypothèse. En définitive, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, deux cas seulement sont possibles : ou bien il n'existe pas de multiplicateur de la forme $\frac{1}{B}$, ou bien il n'en existe qu'un (défini à un facteur constant près).

Si l'on pose

$$B = V(x)\,[y^{\nu} + \alpha_1(x)\,y^{\nu-2} + \ldots + \alpha_0(x)],$$

les fonctions $\alpha_k(x)$ *sont déterminées rationnellement, ainsi que* $\frac{V'(x)}{V(x)}$.

L'expression B étant ainsi calculée, il faut : 1° que les racines $y = g_k(x)$ de B soient toutes simples; 2° que les *résidus* c_k [1] de la fraction $\frac{Q}{B}$ rationnelle en y aient des rapports *commensurables*. Quand ces conditions sont remplies, considérons ces

(1) Ces résidus sont des constantes (indépendantes de x), car soit $\frac{c_1}{y - g_1(x)}$ un des termes de la fraction $\frac{Q}{B}$ décomposée en fractions simples; $2i\pi c_1$ est une période de la différentielle $\frac{Q\,dy}{B}$, donc de la différentielle totale exacte $\frac{Q\,dy - P\,dx}{B}$; elle est, par suite, indépendante de x; c_1 est une constante numérique.

nombres rationnels $\frac{c_k}{c_1}$ rendus irréductibles; appelons i_1 le plus petit commun multiple de leurs dénominateurs; il nous est loisible de multiplier B par une constante numérique telle que c_1 devienne i_1. La nouvelle expression

$$\frac{Q\,dy - P\,dx}{B}$$

est une différentielle totale exacte où l'on a

$$\frac{Q}{P} = \frac{i_1}{y-g_1} + \frac{i_2}{y-g_2} + \ldots + \frac{i_\nu}{y-g_\nu} = \frac{\partial}{\partial y}\log \Pi(y-g_k)^{i_k},$$

les i désignant des entiers sans facteur commun.

La primitive de cette différentielle est donc de la forme

$$\log \Pi(y-g_k)^{i_k} + h(x),$$

et l'on a

$$\frac{Q\,dy - P\,dx}{B} = h'(x) + \sum \frac{i_k(dy - g'_k\,dx)}{y-g_k} = h'(x) + \frac{A\,dy + A_2\,dx}{\Pi(y-g_k)},$$

A et A_2 étant des polynomes en y rationnels en x, ainsi que $\Pi(y-g_k)$. L'identité

$$\frac{h'\Pi(y-g_k) + A_2}{A} \equiv \frac{P}{Q}$$

montre aussitôt que h' est connu, lui aussi, rationnellement.

En définitive, dans le cas que nous venons de traiter, nous savons mettre l'intégrale sous la forme

$$H(x, y) \times u(x) = \text{const.},$$

où H est un polynome en y et x et où $\frac{u'}{u} \equiv h'$ est rationnel en x.

10. *Conclusion.* — Posons-nous, d'après cela, le problème suivant :

Reconnaître si l'intégrale générale $y(x)$ d'une équation (1) *donnée est une fonction* TRANSCENDANTE *qui n'acquiert qu'un nombre fini* NON DONNÉ *de branches autour des points critiques mobiles (ce nombre étant le même pour chaque intégrale, sauf peut-être pour un ensemble dénombrable d'intégrales particulières).*

La réponse s'énonce ainsi : *On peut, à l'aide d'un nombre fini d'opérations rationnelles, résoudre le problème et* (*si la réponse est affirmative*) *ramener l'équation à une équation de Riccati* ([1]).

Il est intéressant de remarquer que si on se pose le même problème en supprimant la restriction que l'intégrale doit être transcendante, le problème devient beaucoup plus difficile ; on ne sait pas reconnaître encore, en général, si l'intégrale générale d'une équation (1) donnée est algébrique. Le problème transcendant apparaît donc ici comme plus simple que le problème algébrique correspondant.

La nature de l'intégrale générale $y(x)$ d'une équation (1) est bien élucidée d'après ce qui précède, dans le cas où elle n'acquiert qu'un nombre fini de branches autour des points critiques mobiles, *ce nombre étant le même pour chaque intégrale particulière*, *sauf peut-être pour certaines intégrales exceptionnelles formant un ensemble dénombrable.*

Mais il est impossible de ne pas se poser la question suivante :

Quelle est la nature de l'intégrale générale $y(x)$ d'une équation (1), *quand chaque intégrale particulière est une fonction de x à n branches* AU PLUS *ou* (*plus généralement*) *admet* AU PLUS *n branches permutables autour des points critiques mobiles ?*

Avant de traiter cette question, j'étendrai les résultats pré-

---

(1) Toutefois, sous cette forme, l'énoncé comporte une certaine restriction ; une fois l'équation (1) ramenée à une équation de Riccati, son intégrale ne sera *transcendante* que si l'intégrale de cette équation de Riccati n'est pas algébrique. Or, quand on cherche à reconnaître si l'intégrale d'une équation de Riccati (à coefficients rationnels) est algébrique, il est un cas exceptionnel où l'on ne sait pas trancher la question mais où l'on sait seulement ramener l'équation à la forme $\frac{u'}{u} = \mathrm{H}(x)$, H étant une fonction algébrique de x à deux branches. Toute la difficulté est alors de reconnaître si les périodes de $\int \mathrm{H}(x)\,dx$ sont commensurables avec $2i\pi$, *problème d'Abel* qu'on ne sait pas résoudre en général. L'énoncé absolument correct répondant au problème du n° 10 serait donc : *On sait résoudre le problème à l'aide d'un nombre fini d'opérations rationnelles, ou ramener l'equation à la quadrature* $\frac{du}{u} = \mathrm{H}(x)\,dx$, (H fonction algébrique à deux branches).

cédents aux équations (1) où le coefficient différentiel est encore rationnel en y, *mais non plus en x*. Cette extension nous permettra de mieux faire ressortir certaines difficultés particulièrement délicates.

11. *Propriétés des équations* (1) *rationnelles en y et analytiques en x.* — Supposons d'abord que, dans l'équation (1), $\frac{P}{Q}$ soit rationnel en y et uniforme (mais non rationnel) en x. Rien n'est changé aux théorèmes fondamentaux des n°s 2 et 3 non plus qu'aux résultats des n°s 5 et 8, à condition de ranger parmi les points ξ énumérés p. 8-15 les singularités transcendantes des coefficients de P et de Q (points essentiels, ensembles parfaits de points singuliers, lignes singulières). Quand l'intégrale *générale* de l'équation (1) acquiert n branches autour des points critiques mobiles, l'équation se ramène à une équation de Riccati (II) (p. 149) par une transformation (I); mais les coefficients de cette transformation ne sont plus rationnels en x non plus que les coefficients de (II); ce sont des fonctions algébriques rationnelles des coefficients de P et Q et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre.

Supposons maintenant que P et Q soient des polynomes en y dont les coefficients sont des fonctions multiformes de x. Considérons une branche quelconque de la fonction $\frac{P}{Q}$, et appelons point ξ tout point singulier non polaire $x = \xi$ de cette branche, et tous les points énumérés p. 8-15. Bornons-nous (mais uniquement par raison de clarté) au cas où il n'existe qu'un nombre fini de tels points ξ. Si x_0 n'est pas un point ξ, partons de x_0 avec une valeur y_0 de y et en adoptant une branche déterminée de $\frac{P}{Q}$, puis faisons décrire à x un chemin qui ne passe par aucun point ξ; toutes les propositions précédentes (n°s 1-8) peuvent être répétées, moyennant toutefois la remarque déjà faite sur la nature des coefficients des équations (I) et (II), coefficients qui sont alors transcendants.

Cette extension faite, revenons au rôle des points critiques fixes et mobiles.

12. *Retour sur les propriétés des points critiques fixes et les points critiques mobiles.* — Soit ξ un point singulier fixe de l'in-

tégrale générale $y(x)$ de (1). Par définition (n° 6), le point x, quand il a parcouru un contour fermé, n'a pas tourné autour du point ξ si l'argument de $x - \xi$ a repris sa valeur initiale.

Par exemple, supposons que x décrive q fois un cercle de centre ξ dans le sens positif, puis un lacet autour d'un point critique mobile, et enfin q fois encore le cercle C, mais dans le sens négatif. Quand il a parcouru ce contour, x n'a pas tourné autour de ξ.

Appliquons cette remarque à l'équation (2) étudiée au n° 4

$$y' = \frac{y}{x(y+1)}. \tag{2}$$

Considérons une intégrale particulière quelconque $y(x)$ et la branche de cette intégrale, soit $y_1(x)$, qui s'annule pour $x = 0$; soit y^0 la valeur de cette branche pour x^0 voisin de zéro; si le point x décrit q fois dans le sens positif un cercle C de centre $\xi = 0$ (à partir de x^0), la branche $y_1(x)$ considérée (holomorphe pour $x = 0$), reprend toujours la même valeur en x^0.

D'autre part, la fonction $y(x)$ admet le point critique algébrique $x_1 = -\frac{x^0}{y^0} e^{-(y^0+1)}$; en ce point, deux valeurs de y deviennent égales à -1 et se permutent autour de x_1. Joignons x^0 à x_1 par un chemin L tel que quand x décrit L, $y(x)$ partant de x^0 avec la valeur y^0 ait en x_1 la valeur -1; puis faisons tourner x une fois autour du point x_1, revenons au point x^0 sur le même chemin L [soit $y_2(x^0)$ la nouvelle valeur de y], et faisons décrire encore q fois à x le cercle C, mais dans le sens négatif. Quand x a parcouru ce circuit total, *x n'a pas tourné autour des points critiques fixes de l'équation* (2). Mais la branche $y_2(x)$ de y, admettant $x = 0$ comme point transcendant d'espèce logarithmique, q valeurs de $y(x)$ se permutent entre elles dans les q dernières rotations [1] le long de C. Nous arrivons ainsi à cette conclusion d'apparence un peu paradoxale : *l'intégrale $y(x)$ de* (2) *a deux points critiques fixes $x = 0$ et $x = \infty$, et un seul point critique mobile (point algebrique au voisinage duquel deux branches se permutent); mais une infinité de branches de $y(x)$ se permutent entre elles quand x tourne autour du point critique mobile sans tourner autour des points critiques fixes.*

---

[1] La même chose a lieu si l'on renverse le sens des rotations autour de O.

13. Traçons, dans le plan des x, une demi-droite issue de O, par exemple l'axe réel négatif L. Dans l'exemple précédent, le point x franchit q fois cette coupure dans un sens et q fois dans le sens inverse. Qu'arriverait-il si l'on assujettissait le point x *à ne jamais franchir la coupure* L?

Définissons une intégrale $y(x)$ de (2) par sa valeur y^0 pour $x = i$. Il est facile de voir que, suivant que y^0 est dans un certain domaine D de son plan ou en dehors de ce domaine, $y(x)$ *acquiert deux valeurs ou une seule* quand x varie arbitrairement sans franchir L.

Considérons en effet l'intégrale $y(x)$ qui pour $x = a$ est égale à -1, et suivons les deux branches y_1, y_2 de $y(x)$ ainsi définies jusqu'au point $x = i$ sur un chemin qui ne traverse pas L. Nous arrivons ainsi en $x = 1$ avec deux valeurs $y_1 = f_1(a)$, $y_2 = f_2(a)$ bien déterminées; quand a varie arbitrairement, les deux points $y_1(a)$, $y_2(a)$ varient dans un certain domaine D du plan des y, domaine limité par les lignes que parcourent y_1 et y_2 quand a décrit la coupure L (¹). Ce domaine D n'embrasse pas d'ailleurs tout le plan des y. En effet, soit y_3 une troisième branche de l'intégrale $y(x)$, et y^0 sa valeur pour $x = i$. Quand x varie à partir du point a sans franchir L, la branche $y_3(x)$ ne présente ni en dehors de L ni sur L aucun point critique (²); la valeur de y^0 n'est donc atteinte par aucune des fonctions $y_1(a)$, $y_2(a)$ quel que soit a.

Donc, quand x varie arbitrairement à partir de $x = i$ sans jamais franchir la coupure L, *l'intégrale générale $y(x)$ de* (2), *définie par $x = i$, $y = y^0$, a deux déterminations si y^0 est intérieur au domaine* D, *et une seule détermination si y^0 est extérieur à* D *ou sur la frontière de ce domaine.* Ce domaine D dépend essentiellement de la demi-droite L issue de l'origine qu'il nous a plu de choisir.

(¹) A un point a de L correspond *deux* couples de valeurs y_1, y_2 (et non un seul) suivant qu'on va de a au point $x = i$ sur un chemin qui part de L d'un côté ou de l'autre. Posons $y^0 = u + iv$. La frontière de D fait partie de la courbe $u = v \tang v$, commé on le voit, d'après l'égalité $ye^y = y^0 e^{y^0} \frac{x}{x^0}$, en faisant $y = -1$, $x^0 = i$ et en donnant à x des valeurs réelles (négatives).

(²) Autrement, l'intégrale particulière $y(x)$ admettrait au moins deux points critiques mobiles, et l'on sait qu'elle n'en possède qu'un (nº 4).

14. *De la rotation autour des points critiques mobiles.* — Imaginons qu'à la définition adoptée au n° 6, au sujet de la rotation de x autour des points critiques mobiles, nous substituions la définition suivante :

Les points ξ étant en nombre fini, traçons à partir de chacun de ces points des lignes s'écartant à l'infini et sans points communs.

Convenons de dire que l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction à n branches permutables autour des points critiques mobiles si, quand x varie sans franchir ces coupures, n branches exactement de chaque intégrale particulière $y(x)$ se permutant entre elles (exception étant faite peut-être pour certaines intégrales formant un ensemble dénombrable).

Quelles sont les propriétés qu'entraîne cette définition? Il est bien évident, tout d'abord, qu'elle permet de répéter tous les raisonnements du n° 7 : toute équation qui répond à la définition nouvelle rentre donc dans la classe des équations dont l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction algébrique de y^0. Mais cette définition est beaucoup plus étroite que celle du n° 6, comme le montrent aussitôt les exemples suivants.

Considérons l'équation

$$y' = \frac{1}{2xy},$$

dont l'intégrale générale est $y = \sqrt{\log x + (y^0)^2}$, si y^0 est la valeur de y pour $x = 1$. Les points ξ sont ici $x = 0$ et $x = \infty$. D'après la définition du n° 6, l'intégrale $y(x)$ est une fonction à *deux* branches permutables autour des points critiques mobiles, mais elle ne répond pas à la *nouvelle* définition. Traçons, par exemple, le demi-axe réel négatif et assujettissons x à ne pas le franchir. L'intégrale $y(x)$ a deux branches permutables si y^0 se trouve dans la partie D du plan comprise entre les deux hyperboles $\xi\eta = \pm\pi$, $(y^0 = \xi + \eta i)$; si y^0 est extérieur à D, $y(x)$ n'acquiert qu'une détermination quand x varie sans franchir la coupure.

Considérons de même la fonction

$$y = \sqrt{C + \sqrt{x}} + \sqrt{C - \sqrt{x}}$$

qui vérifie l'équation

$$y' = \frac{2y}{4x - y^4};$$

elle acquiert quatre déterminations autour des points critiques mobiles, d'après la définition du n° 6. Appliquons la nouvelle définition en prenant comme coupure l'axe réel positif du plan des x; $y(x)$ acquiert alors deux déterminations *sauf pour les valeurs réelles de* C. La nouvelle définition n'est donc pas satisfaite. En un mot, elle est beaucoup plus restreinte que la première.

15. On pourrait, il est vrai, adopter la dernière définition en supprimant la restriction qu'elle renferme. *Les coupures étant tracées,* on conviendrait de dire que l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction à n déterminations permutables autour des points critiques mobiles, si $y(x)$ n'acquiert que n valeurs *au plus* quand x varie sans franchir les coupures. Mais si l'on applique cette définition à l'exemple du n° 13, on voit que l'intégrale $y(x, y^0, \overline{x^0})$ de l'équation (2), permutable autour des points critiques, acquiert deux déterminations ou une seule suivant que y^0 est dans une certaine région D de son plan ou dans une autre : la région D dépend essentiellement de la coupure issue de $x = 0$ que nous choisissons. Enfin, $y(x, y^0, \overline{x^0})$ est une fonction de y^0 *à une infinité de branches.* La dernière définition proposée est à la fois arbitraire et trop générale. C'est bien la définition du n° 6 qui s'impose dans les problèmes que nous traitons ici.

16. *Remarques sur l'équation* $y' = \mathrm{H}(x)\frac{y}{y+1}$, *où* H *est une fonction transcendante de* x. — Les remarques précédentes entraînent des conséquences intéressantes sur l'équation (2) où l'on remplace x par une fonction transcendante convenable d'une nouvelle variable.

Considérons, dans le plan des x, une aire Δ située tout entière au-dessus de l'axe réel, et limitée par un contour fermé *qui n'est nulle part analytique.* Soit $x = \mathrm{F}(\mathrm{X})$ une fonction effectuant la représentation conforme de Δ sur le cercle Γ du plan des X qui a l'origine pour centre et pour rayon l'unité. La fonction $\mathrm{F}(\mathrm{X})$,

holomorphe dans Γ, admet la circonférence Γ comme *coupure essentielle*.

Si nous remplaçons x par $F(X)$ dans l'équation (2), il vient

$$(2\,bis) \qquad \frac{dy}{dX} = \frac{F'(X)}{F(X)}\frac{y}{y+1} \equiv H(X)\frac{y}{y+1},$$

$H(X)$ désignant une fonction de X, holomorphe dans Γ et présentant cette circonférence comme coupure essentielle. A l'intérieur de Γ, l'intégrale $y(X)$ n'a pas de points singuliers fixes.

Supposons, par exemple, que F soit égal à i pour $X = 0$. Définissons une intégrale particulière (yX) de (2 *bis*) par $X = 0$, $y = y^0$. Je dis que *l'intégrale $y(X)$ est une fonction uniforme ou à deux branches selon que y^0 est extérieur ou intérieur à un certain domaine D' du plan des y^0.*

En effet, soit a un point du domaine Δ; considérons l'intégrale $y(x)$ de (2) qui, pour $x = a$, est égale à -1, et faisons décrire à x, *à l'intérieur de* Δ, un chemin quelconque joignant les points $x = a$ et $x = i$; soient, comme plus haut, $y_1(a)$, $y_2(a)$ les deux valeurs ainsi obtenues pour $x = i$; quand a varie dans Δ, ces deux valeurs $y_1(a)$, $y_2(a)$ varient dans un certain domaine D' (compris dans le domaine D du numéro précédent). *Si y^0 est intérieur à D', l'intégrale $y(X)$ est une fonction de X à deux branches, admettant la circonférence Γ comme coupure essentielle* (¹); *si y^0 est extérieur à D' ou appartient à sa frontière, $y(X)$ est holomorphe dans la circonférence Γ [coupure essentielle de $y(X)$]* (²).

Remarquons que l'intégrale générale de (2 *bis*) est définie par la relation

$$y e^y = y^0 e^{y^0} \frac{F(X)}{F(X_0)};$$

soit $X_0 = 1$, d'où $F = i$; l'intégrale $y = \varphi(X, y^0)$, définie par

$$i y e^y = y^0 e^{y^0} F(X),$$

(¹) Soit $y_1(X)$, $y_2(X)$ ces deux branches; $y_1 + y_2$ et $y_1 y_2$ sont des fonctions de X holomorphes dans Γ; $y(X)$ admet dans Γ un seul point critique.

(²) Si le domaine Δ comprend l'origine $x = 0$, l'intégrale $y(X)$ est une fonction qui a dans Γ un seul point critique (*qui est fixe*) ou au contraire deux points critiques, l'un fixe, l'autre mobile, cela suivant que y^0 fait partie ou non d'un certain domaine D'. Dans le dernier cas, une infinité de branches de $y(X)$ se permutent sans que x tourne autour des points critiques fixes.

est une fonction de X *à une ou deux branches suivant les valeurs de* y^0, définie seulement dans Γ (coupure essentielle), et une fonction de y^0, *à une infinité de branches*. Si y^0 est extérieur au domaine D′, une seule de ces branches représente l'intégrale $y(X)$ égale à y^0 pour $X=0$; toutes les autres branches représentent des intégrales particulières de (2 *bis*) qui ne se permutent pas dans le champ des X avec la précédente. Si y^0 est intérieur au domaine D′, la même remarque s'applique à toutes les branches de $\varphi(X, y^0)$, sauf à deux.

Si y^0 varie et sort de D′, une des branches de $\varphi(X, y^0)$ qui coïncide avec une des deux branches de l'intégrale $y(X)$ définie par $X=0$, $y=y^0$, cesse de jouir de cette propriété quand y^0 franchit la frontière de D′.

Soit $y(x)$ l'intégrale de (2) définie par $x=i$, $y=y^0$, et soient $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0, \ldots$ les valeurs qu'acquiert $y(x)$ quand x décrit, à partir de i, un contour fermé quelconque sans tourner autour des points critiques fixes. Parmi ces valeurs $y_1^0, y_2^0, \ldots$, il en est une seule ou il n'en est aucune qui soit une valeur, pour $X=0$, de la fonction $y(X)$ définie par $X=0$, $y=y^0$, cela selon que y^0 est intérieur ou non à D′. Les branches de la fonction $y=\varphi(X, y^0)$ représentent les intégrales $y(X)$ de (2 *bis*) qui, pour $X=0$, prennent les valeurs

$$y^0, \quad y_1^0, \quad y_2^0, \quad \ldots, \quad y_n^0, \quad \ldots.$$

17. Dans l'exemple précédent, H(X) est une fonction uniforme *à ligne singulière essentielle*. On peut former des exemples qui présentent des propriétés aussi curieuses, et où H(X) est une fonction à une infinité de branches, n'ayant qu'un nombre fini de points singuliers.

Considérons l'intégrale elliptique $\int \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z+X)}}$, et soient $\omega_1(X)$, $\omega_2(X)$ deux périodes primitives de cette intégrale, choisies de façon que, pour $X=1$, une des valeurs de $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ soit $+i$.

Posons

$$x = \frac{\omega_2}{\omega_1}(X) = \tau(X), \qquad \text{d'où} \qquad X = \rho(x),$$

ρ désignant une fonction modulaire de x. La fonction $x(X)$ est

holomorphe, sauf pour $X = 0$, $X = 1$, $X = \infty$. Ce changement de variables transforme l'équation (2) dans l'équation

$$\text{(2 ter)} \qquad \frac{dy}{dX} = \frac{\tau'(X)}{\tau(X)} \frac{y}{y+1} \equiv H(X) \frac{y}{y+1},$$

la fonction $H(X)$ représentant une fonction à une infinité de valeurs, holomorphes sauf pour $X = 0$, $X = -1$, $X = \infty$. Les seuls points ξ sont donc ici les points 0, 1, ∞.

Définissons une intégrale $y(X)$ en prenant $X = 1$ comme valeur initiale de X, en adoptant pour $X = 1$ la branche de $\tau(X)$ qui est égale à i, et en appelant y^0 la valeur correspondante de $y(X)$. Quand X varie arbitrairement, $x(X)$ varie dans son plan *au-dessus de l'axe réel.* Il suit de là que $y(X)$ *n'a d'autres points critiques que* $X = 0$, $X = -1$, $X = \infty$ *si* y^0 *est extérieur à un certain domaine* D″ *du plan des* y^0 (¹). Si y^0 est intérieur à ce domaine, $y(X)$ présente un point critique mobile et un seul.

Quand X décrit dans son plan un contour fermé quelconque sans tourner autour des points $X = 0$, $X = 1$, deux valeurs de $y(X)$ au plus se permutent : en effet, le contour parcouru, $x = \tau(X)$ reprend sa valeur initiale, et, d'autre part, comme x n'a jamais franchi l'axe réel de son plan, la fonction $y(x)$ correspondante ne saurait prendre que deux valeurs au plus chaque fois que x repasse par sa position initiale.

L'intégrale $y(X)$ *de l'équation* (2 *ter*) *est donc une fonction à points critiques fixes ou à deux branches permutables autour des points critiques mobiles, selon que* y^0 *est extérieur ou intérieur à un certain domaine* D″.

Les remarques faites au n° 16 sur les branches (en nombre infini) de la fonction $y = \varphi(\overline{X}, y^0, \overline{X^0})$, peuvent se répéter ici; seules, deux ou une de ces branches (permutables dans le champ

---

(¹) Considérons la relation $y e^y = y^0 e^{y^0} \frac{x}{x^0}$ et faisons $y = -1$, $x^0 = i$; dans l'équation $y^0 e^{y^0} = -\frac{i}{xe}$, faisons varier x à partir de i au-dessus de l'axe réel, en adoptant pour $x = i$ la racine double $y^0 = -1$; la racine $y^0(x)$ décrit alors le domaine D″; la courbe limite de ce domaine fait partie de la courbe $u = v \operatorname{tang} v$ (si $y^0 = u + iv$) (*voir* le n° 13, p. 158).

des y^0) représentent l'intégrale $y(X)$ qui, pour $X = \overline{X^0}$, est égale à y^0.

Soit $\overline{X^0} = 1$; quand y^0 franchit la frontière Γ de D'', une branche de $\varphi(\overline{X}, y^0, \overline{X^0})$, qui représente l'intégrale $y(X, y^0, \overline{X^0})$ d'un côté de Γ, représente de l'autre côté une intégrale $y(X)$ dont aucune branche ne prend la valeur y^0.

Si l'on avait posé

$$x = -2i + \frac{\omega_2(X)}{\omega_1(X)} \equiv -2i + \tau(X),$$

une des valeurs de x correspondant à une certaine valeur X_1 de X serait nulle. L'équation (2^{IV}) ainsi obtenue présente un quatrième point ξ, à savoir $X = X_1$. Quand X varie arbitrairement, x varie dans son plan au-dessus de la droite $\beta = -2i$ (si $x = \alpha + \beta i$); selon que y^0 est extérieur ou non à un certain domaine D''', la fonction $y(X)$ n'a que des points critiques fixes ou au contraire un point critique mobile : dans ce dernier cas, la fonction $y(X)$ a une infinité de branches qui se permutent sans que X tourne autour des points critiques fixes. La fonction $y = \varphi(\overline{X}, y^0, \overline{X^0})$ a une infinité de branches qui se permutent dans le champ des y^0 ; si y^0 est intérieur au domaine D''', toutes ces branches représentent des valeurs de l'intégrale $y(X)$, dont une des valeurs pour $X = 1$ est y^0 ; si y^0 est extérieur à D''', une seule de ces branches représente cette intégrale.

18. *Quelques remarques sur les équations dont les intégrales $y(x)$ sont des fonctions à n branches en plus.* — Les exemples précédents font comprendre toute la difficulté de la question que nous nous posons maintenant :

Quant les intégrales $y(x)$ d'une équation

$$(1) \qquad y' = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)} \qquad (\text{P et Q polynomes en } y)$$

ont n branches AU PLUS, *l'intégrale générale $y = \varphi(x, y^0, \overline{x^0})$ est-elle nécessairement une fonction algébrique de y^0?*

Si nous ne faisons aucune hypothèse sur les fonctions analytiques $a_j(x)$, $b_j(x)$, coefficients des polynomes P et Q en y, la

réponse est sûrement *négative*. L'exemple du numéro 16 nous a montré une équation (1) dont les coefficients sont des fonctions uniformes affectées d'une ligne singulière, et dont l'intégrale générale $y = \varphi(x, y^0, \overline{x^0})$ est une fonction transcendante de y^0, bien que chaque intégrale particulière $y(x)$ soit une fonction uniforme ou à deux branches (selon la valeur de y^0).

Plus généralement, posons-nous la question précédente en admettant seulement que *chaque intégrale acquiert* au plus *n branches autour des points critiques mobiles*. L'exemple du numéro 17 nous montre que la réponse est *négative*, même dans un cas où les coefficients de P et Q sont des fonctions de x n'ayant que *trois* points singuliers (mais une infinité de branches).

Mais restreignons-nous au cas *où* P *et* Q *sont aussi des polynomes en x et où $y(x)$ admet n branches au plus*. Quelle est alors la réponse à la question posée?

Traitons d'abord le cas de $n = 2$.

19. *Cas où les intégrales $y(x)$ ont deux branches au plus* [1]. — Soit $Q_1(y, x)$ un des polynomes qui sont en facteur dans Q (polynome qui se confond avec Q lui-même si Q est irréductible) et soit $x = \alpha$, $y = \beta$ un point de la courbe algébrique

$$Q_1(\beta, \alpha) = 0. \tag{2}$$

Si α est une valeur quelconque *distincte des* ξ, l'intégrale $y(x)$ qui, pour $x = \alpha$ est égale à β, admet $x = \alpha$ comme point critique algébrique autour duquel deux branches y_1, y_2 de $y(x)$ se permutent : les combinaisons $y_1 + y_2$ et $y_1 y_2$ *n'ont qu'une seule valeur* quels que soient x et le point (α, β) de la courbe (2); autrement dit, les fonctions

$$y_1 + y_2 = \psi(x, \alpha, \beta), \qquad y_1 y_2 = \chi(x, \alpha, \beta)$$

sont des fonctions *uniformes* de x et du point analytique α, β, et ces fonctions ne peuvent admettre comme points singuliers trans-

[1] Nous admettons qu'une intégrale particulière, au moins, a deux branches; sinon l'équation serait une équation de Riccati.

cendants que les valeurs $x = \xi$ dans le champ des x et les valeurs $\alpha = \xi$ dans le champ des α. La fonction y vérifie l'équation

$$(3) \qquad y^2 + \psi(x, \alpha, \beta) y + \chi(x, \alpha, \beta) = 0.$$

Supposons d'abord que ψ et χ ne soient pas tous deux rationnels en α, β, et soit $\alpha = \xi$ un point transcendant de ψ (ou de χ); si l'on pose $\alpha - \xi = t^\nu$, ν étant un entier convenable, β est rationnel en t pour t voisin de zéro, et les fonctions ψ et χ de (x, t) sont uniformes en t pour t voisin de zéro; $t = 0$ est donc un point singulier essentiel (au sens de Weierstrass) de ψ (ou de χ).

Or $y(x)$ vérifie la relation

$$(4) \qquad y^2 + \psi(x, t) y + \chi(x, t) = 0,$$

et d'après un théorème aujourd'hui bien établi ([1]), si dans cette relation (où x a reçu une valeur numérique $\overline{x^0}$), je donne à y une valeur arbitraire y^0, l'équation en t ainsi obtenue *admet une infinité de racines, soit t_j, voisines de $t = 0$, sauf pour quatre valeurs au plus de y^0*. L'intégrale $y(x)$, définie par $\overline{x^0}$, y^0, admet donc une infinité de points critiques mobiles $x = \alpha = \xi + t_j^\nu$, sauf peut-être pour quatre valeurs de y^0.

Supposons maintenant que ψ et χ soient rationnels en α. Il est évident que y est une fonction algébrique de y^0. D'ailleurs, l'intégrale $y(x)$ définie par $\overline{x^0}$, y^0 a deux valeurs, à moins que toutes les racines α définies par

$$(5) \qquad (y^0)^2 + \psi(\overline{x^0}, \alpha, \beta) y^0 + \chi(\overline{x^0}, \alpha, \beta) = 0, \qquad Q_1(\alpha, \beta) = 0$$

soient confondues avec des valeurs ξ.

Soit r le nombre des points ξ (en y comprenant éventuelle-

([1]) Le théorème général auquel je fais allusion est le suivant : Si dans la relation

$$(E) \qquad y^n + A_{n-1}(t) y^{n-1} + \ldots + A_0(t) = 0,$$

les A_j sont uniformes pour t voisin de zéro et admettent $t = 0$ comme point essentiel isolé, l'équation (E) en t admet une infinité de racines voisines de zéro, sauf pour $2n$ valeurs au plus de y.

ment $\xi = \infty$) : comme $Q(\beta, \alpha)$ est au plus de degré q en β, le nombre de valeurs de y^0 correspondant d'après (5) aux r valeurs $\alpha = \xi$, est au plus de $2mr$. D'où ce théorème :

THÉORÈME. — *Quand les intégrales $y(x)$ d'une équation (qui n'est pas une équation de Riccati)*

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)} \qquad (\text{P et Q polynomes en } x, y)$$

sont des fonctions à deux branches au plus, elles ont TOUTES *deux branches* SAUF PEUT-ÊTRE UN NOMBRE FINI D'ENTRE ELLES (¹).

L'intégrale générale $y = \varphi(x, y^0, \overline{x^0})$ est, par suite, une fonction *algébrique* de y^0; on est ramené au cas des numéros **7** et **8**.

20. La démonstration s'étend d'elle-même au cas où les coefficients $a_j(x)$, $b_l(x)$ de P et de Q sont des fonctions uniformes de x admettant au moins *un point singulier essentiel isolé* (²). D'autre part, quand ces coefficients admettent une ligne singulière, l'intégrale générale $y(x)$ peut être une fonction à deux branches au plus, et en même temps une fonction transcendante de y^0. Le seul cas qui reste douteux est celui où les coefficients $a_j(x)$, $b_l(x)$ sont des fonctions uniformes admettant un ensemble parfait et nulle part continu de points singuliers.

21. Supposons maintenant que les intégrales $y(x)$ de (1) acquièrent au plus deux branches *autour des points critiques mobiles*. En raisonnant comme au numéro **19**, on voit que les

(¹) Ce nombre est au plus égal à 4 à moins que les points critiques de chaque intégrale $y(x)$ ne soient en nombre *fini*.

(²) J'entends par là qu'un tel point est point essentiel isolé d'au moins un des coefficients a_j, b_l, et qu'il est, pour les autres, point essentiel isolé, pôle ou point régulier. Soit ξ un tel point : $y(x)$ vérifie une équation de la forme (3), et en éliminant β entre les équations (2) et (3), on forme une relation de la forme

$$y^{2n} + A_{n-1}(x, \alpha) y^{2n-1} + \ldots + A_0(x, \alpha) = 0,$$

où $\alpha = \xi$ est point essentiel isolé des fonctions A_j uniformes en α. Laissons à x une valeur numérique : l'équation en α a une infinité de racines voisines de α_1 sauf pour q valeurs au plus de y.

combinaisons $y_1+y_2=\psi(x, \alpha, \beta)$, $y_1 y_2=\chi(x, \alpha, \beta)$ sont des fonctions de x n'ayant que des singularités polaires en dehors des points $x=\xi$; ce sont, par suite, des fonctions du point analytique (α, β), c'est-à-dire de α, qui dans le champ des α ont toutes leurs singularités non polaires fixes; ces singularités sont, ou les points critiques de $\beta(\alpha)$, ou les valeurs $\alpha=\xi$; les singularités transcendantes font parties nécessairement des valeurs $\alpha=\xi$ [1].

Il suit de là qu'on peut imaginer dans le plan des x une infinité *dénombrable* de chemins L allant de $\overline{x^0}$ en $\overline{x}$, *indépendants de la constante* α, et tels qu'on obtienne *toutes* les valeurs de $\psi(x)$ et de $\chi(x)$ en partant de $\overline{x^0}$ avec une branche arbitrairement choisie, et en allant en $\overline{x}$ sur les divers chemins L. Soit ψ_1 et ψ_2 deux branches de $\psi(x)$ correspondant aux chemins L_1, L_2; si pour une certaine valeur de α, ψ_1 et ψ_2 se confondent, cette valeur satisfait à la condition $\psi_1(\overline{x}, \alpha, \beta)=\psi_2(\overline{x}, \alpha, \beta)$, et une remarque analogue s'applique à la fonction χ. Supposons maintenant que chaque intégrale $y(x)$ acquière dans tout le plan des x un nombre *fini* de valeurs. Il résulte des remarques précédentes que ce nombre est le même quelle que soit l'intégrale considérée, sauf peut-être pour certaines intégrales formant un ensemble dénombrable [2]. Par conséquent, on est ramené au cas étudié dans le numéro 7. L'in-

---

[1] En général, ces valeurs $\alpha=\xi$ sont des singularités transcendantes de ψ et de χ. Considérons, par exemple, l'équation

$$y' = -\frac{(y^2+1)}{2yx^2},$$

dont l'intégrale générale est

$$y^2 = e^{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}\right)} - 1, \qquad (\beta = 0):$$

un des points ξ est l'origine et $\alpha = 0$ est un point essentiel de

$$y_1 y_2 \equiv \chi(x, \alpha) \equiv e^{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}\right)} - 1.$$

Même remarque sur l'exemple

$$y^2 = \log x - \log \alpha.$$

[2] En effet, chaque équation

$$\psi_1(\overline{x}, \alpha, \beta) = \psi_2(\overline{x}, \alpha, \beta) \qquad [\text{avec } Q_1(\alpha, \beta) = 0]$$

ne définit qu'un ensemble dénombrable de valeurs α. Une infinité dénombrable de telles équations ne saurait définir qu'un ensemble dénombrable de valeurs α.

tégrale générale $y(x, y^0, \overline{x^0})$ est une fonction algébrique de y^0.

De plus, cette intégrale peut se mettre sous la forme

$$y^m + A_{n-1}(x, \alpha)y^{n-1} + \ldots + A_1(x, \alpha)y + A_0(x, \alpha) = 0,$$

m désignant un certain entier, et les A_j des fonctions uniformes de x et de α qui ne peuvent admettre comme singularités non polaires que les points $x = \xi$ et $\alpha = \xi$.

Si les A_j ne sont pas tous rationnels en α, il ne peut y avoir plus de $2m$ intégrales $y(x)$ ayant tous leurs points critiques confondus avec les points ξ.

Le raisonnement s'étend de lui-même au cas où les coefficients $a_j(x)$, $b_l(x)$ de P et Q seraient algébriques (et non rationnels en x). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Quand chaque intégrale $y(x)$ d'une équation*

$$y' = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)} \qquad (\text{P et Q polynomes en } y \text{ algébriques en } x)$$

n'a qu'un nombre fini de branches et acquiert au plus deux valeurs autour des points critiques mobiles, l'intégrale générale $y(x, y^0, \overline{x^0})$ est une fonction algébrique de y^0, et il n'existe qu'un nombre fini d'intégrales ayant tous leurs points critiques confondus avec les points fixes ξ.

Enfin la démonstration s'applique encore au cas où les coefficients $a_j(x)$, $b_l(x)$ de P et Q sont des fonctions transcendantes à un nombre fini de branches admettant au moins un point singulier essentiel isolé (1).

Cette démonstration peut-elle s'étendre au cas où le nombre maximum n des branches permutables autour des points critiques mobiles dépasse 2? Pour qu'il en fût ainsi (2), il faudrait au préalable avoir démontré le théorème suivant :

---

(1) J'entends par là qu'un tel point, soit $x = \xi$, n'est pour aucun des coefficients a_j, b_l un point limite de points singuliers transcendants et qu'il est point transcendant pour un au moins de ces coefficients.

(2) Si n est > 2, mais si Q renferme en facteur un polynome à la puissance $(n-1)$, soit $[Q_1(y, x)]^{n-1}$, les raisonnements du n° 19 et du n° 21 s'appliquent sans modifications.

THÉORÈME A (?). — *Si dans la relation*

$$y^m + A_{m-1}(t)y^{m-1} + \ldots + A_1(t)y + A_0(t) = 0$$

les A_j *sont des fonctions uniformes de t n'ayant qu'un nombre fini de points essentiels, les points singuliers transcendants de la fonction* $t(y)$ *ainsi définie forment nécessairement un ensemble dénombrable.*

Bien que cette proposition ne soit pas douteuse, elle n'est pas encore démontrée rigoureusement, même dans le cas où $t(y)$ est l'inverse d'une fonction entière $y(t)$.

Je vais indiquer brièvement une autre méthode pour étudier le cas de n quelconque.

22. *Propriétés des équations dont les intégrales* $y(x)$ *ont au plus n branches.* — Supposons que les intégrales $y(x)$ de l'équation

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)} \qquad (P, Q \text{ polynomes en } x, y)$$

aient au plus n branches, et que le nombre maximum de ces branches permutables autour des points critiques mobiles soit $\nu (\nu \leqq n)$.

Appelons *intégrales exceptionnelles d'espèce* i_m les intégrales qui acquièrent moins de ν branches *autour des points critiques mobiles* [1]. Si une intégrale $y(x)$ définie par x^0, y^0 n'est pas exceptionnelle d'espèce i_m, le raisonnement du n° 7 montre que les combinaisons symétriques des ν branches permutables autour des points critiques mobiles sont des fonctions méromorphes de y^0 pour la valeur y^0 considérée.

Appelons *intégrales exceptionnelles d'espèce* i_f les intégrales qui ont moins de n branches distinctes [2]. Si une intégrale définie par $\overline{x^0}$, y^0 n'est pas exceptionnelle d'espèce i_f, les combinaisons symétriques de ses n branches sont des fonctions méromorphes de y^0 pour la valeur y^0 considérée (n° 5).

Supposons maintenant qu'une intégrale, soit $Y(x)$, définie par $x = \overline{x^0}$, $y = b$, soit exceptionnelle à la fois des deux espèces i_m

(1) L'indice m rappelle le rôle des points critiques mobiles.
(2) L'indice f rappelle le rôle des points critiques fixes.

et i_f. Il peut se faire qu'il existe n chemins INDÉPENDANTS DE y^0 allant de $\overline{x^0}$ en $\overline{x}$ et tels que, pour y^0 quelconque mais voisin de b, $y(x, y^0, \overline{x^0})$ acquière n valeurs distinctes sur ces n chemins. Quand il en est ainsi, le raisonnement du n° 5 montre que les combinaisons symétriques des n branches de $y(x, y^0, \overline{x^0})$ sont méromorphes pour $y^0 = b$. Ce cas se présente si $Y(x)$ est une fonction à $\frac{n}{j} = n'$ branches (j étant un certain diviseur de n) et si les n branches de $y(x, y^0, \overline{x^0})$ se confondent, par n' groupes de j, avec les n' branches de $Y(x)$ pour y^0 tendant vers b (¹).

Nous dirons, dans ce cas, que l'intégrale $Y(x)$ est à *apparence exceptionnelle,* et nous convenons d'appeler *intégrale réellement exceptionnelle* toute intégrale à la fois exceptionnelle *d'espèce* i_m *et d'espèce* i_f et telle de plus que la condition précédente ne soit pas remplie.

Ceci posé, *si les intégrales réellement exceptionnelles forment un ensemble dénombrable,* le raisonnement du n° 7 montre que les combinaisons symétriques des ν valeurs d'une intégrale $y(x)$ permutables autour des points critiques mobiles sont des fonctions rationnelles de y^0.

Tout le problème est donc ramené au suivant : *Les intégrales exceptionnelles à la fois d'espèce* i_m *et d'espèce* i_f *peuvent-elles former un ensemble non dénombrable?*

23. *Singularité de* y *regardée comme fonction de* y^0. — Admettons que les intégrales exceptionnelles forment un ensemble non dénombrable, et soit $x = \overline{x^0}$, $y = c$ des conditions initiales définissant une telle intégrale. L'ensemble $\mathcal{C}$ des valeurs c dans le champ des y^0 est, suivant une remarque déjà faite (n° 5), un en-

---

(¹) Si l'intégrale générale de l'équation considérée est $y = \sqrt[3]{x(x-C)}$, l'intégrale $Y(x)$ qui correspond à $C = 0$ est exceptionnelle d'espèce i_m, mais non d'espèce i_f. Si l'intégrale générale est $y = \sqrt[2]{x+1+C\sqrt{x}}$, l'intégrale $Y(x)$ qui correspond à $C = 0$ est exceptionnelle d'espèce i_f, mais non d'espèce i_m. Enfin, si l'intégrale est définie par $\frac{y^2}{2y-1} = Cx$, c'est-à-dire par $y = Cx + \sqrt{Cx(x-1)}$, l'intégrale $Y(x)$ qui correspond à $C = 0$ est exceptionnelle d'espèce i_m et d'espèce i_j, mais n'est qu'*apparemment exceptionnelle.*

semble *fermé*. Puisqu'il n'est pas dénombrable, trois hypothèses sont possibles :

Ou bien des *aires* finies du plan des y^0 font partie de l'ensemble $\mathcal{E}$;

Ou bien aucune *aire* ne fait partie de l'ensemble $\mathcal{E}$, mais cet ensemble renferme des *lignes* (j'entends des ensembles parfaits bien enchaînés ne comprenant aucune aire);

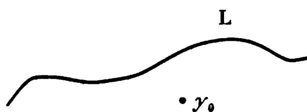
Ou bien enfin aucun ensemble continu bien enchaîné ne fait partie de $\mathcal{E}$.

Dans les deux premiers cas, il existe au moins une ligne (au sens de Cantor), soit L, qui fait tout entière partie de $\mathcal{E}$, et dont chaque point a dans son voisinage des points n'appartenant pas à $\mathcal{E}$. *Montrons que la chose est impossible.*

Pour plus de simplicité, je me limiterai au cas où $n = 2$ (l'équation n'étant pas une équation de Riccati). Dans ces conditions, une intégrale au moins, soit $Y(x)$, acquiert ses deux valeurs autour d'un point x distinct des points ξ, et par suite toutes les intégrales $y(x)$ voisines de $Y(x)$ ont au moins un point critique mobile autour duquel les deux branches de $y(x)$ se permutent.

24. *Démonstration d'un lemme.* — Si y^0 n'appartient pas à $\mathcal{E}$, à cette valeur correspond au moins un point critique mobile $x = \alpha$

Fig. 1.



de $y(x)$, point distinct des ξ et où y prend la valeur β (finie ou infinie) satisfaisant à la relation

$$Q(\beta, \alpha) = 0. \tag{2}$$

Il est loisible de faire en sorte que $x = \infty$ ne fasse pas partie des points ξ; posons alors

$$\rho = (\alpha - \xi_1)(\alpha - \xi_2)\ldots(\alpha - \xi_k),$$

k étant le nombre des points ξ. La quantité ρ, pour chaque valeur de y^0 non comprise dans $\mathcal{E}$, a au moins une valeur différente de zéro; j'appelle $r(y^0)$ la limite *supérieure* des modules des diverses

valeurs de ρ correspondant à y^0 [1]. *Je dis que r tend vers zéro quand y^0 tend vers un point c de $\mathcal{C}$ et en particulier vers un point quelconque de* L.

En effet, supposons qu'il en soit autrement. D'après une proposition aujourd'hui classique de la théorie des limites, il existerait au moins une valeur $x = x_1$ [2] distincte des valeurs ξ et telle que pour *des* [3] valeurs y^0 tendant vers c, α tende vers x^0, β tendant par suite vers une des q valeurs y_1 définies par [4]

$$Q(y_1, x_1) = 0.$$

Le couple (x_1, y_1) n'annule pas $P(y, x)$, puisque x_1 n'est pas un point ξ. L'intégrale $Y(x)$ définie par $(x = x_1, \; y = y_1)$ est une intégrale à deux branches Y_1, Y_2, *permutables autour du point* $x = x_1$. Quand y^0 tend vers c, l'intégrale $y(x, y^0, \overline{x^0})$ bien définie pour x voisin de $\overline{x^0}$ tend vers une des deux fonctions $Y_1(x)$ ou $Y_2(x)$, et par suite l'intégrale $y(x, c, \overline{x^0})$ se confond avec $Y(x)$. La valeur c ne ferait donc point partie de l'ensemble $\mathcal{C}$.

25. Le lemme précédent entraîne cette conséquence qu'*une ligne telle que* L *ne saurait exister*.

En effet, considérons dans le plan des y^0 un point P ne faisant pas partie de $\mathcal{C}$ et voisin de L, tel que : 1° deux certaines droites MA, MB issues de M et faisant un angle de 120° rencontrent L en deux points A et B *équidistants* de M; 2° un ensemble continu appartenant à L et joignant A, B reste à une distance de M moindre qu'une quantité finie l. Il est loisible d'admettre que M est l'origine. Soient maintenant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les deux ensembles qui se déduisent de l'ensemble $\mathcal{C}$ en le faisant tourner autour de M de 120° et de 240°, et $\mathcal{C}'$ l'ensemble formé par la réunion de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$. Appelons D le domaine de tous les points y^0 qu'on peut atteindre en partant de M sans rencontrer aucun point de $\mathcal{C}'$; ce domaine comprend M à son

---

[1] r est $+\infty$ si une valeur de α correspondant à y^0 est infinie.

[2] x_1 pourrait être $+\infty$, mais en changeant x en $\frac{1}{x+a}$ on ramènerait x_1 à distance finie.

[3] Mais non pas nécessairement pour *toutes* les valeurs y^0 voisines de c.

[4] Il est loisible de supposer (moyennant un changement homographique sur y) que $q = p - 2$, et que $Q(y_1, x_1)$ est bien de degré q en y.

intérieur; il est intérieur à un angle de centre M et de rayon l; il est donc limité par une ligne fermée, soit λ. Ceci posé, ε désignant $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, considérons l'expression

$$\sigma(y^0)=\rho(y^0)\,\rho(\varepsilon y^0)\,\rho(\varepsilon^2 y^0).$$

Cette fonction peut avoir une infinité de déterminations; appelons $s(y^0)$ *la limite supérieure des modules* de ces valeurs pour y^0 donné. Si y^0 fait partie de $\mathcal{C}'$, $s(y^0)$ est nul et réciproquement. La quantité $s(y^0)$ s'annule [1] sur la frontière λ de D; elle est différente de zéro en M; appelons S *la limite supérieure de* $s(y^0)$ pour y^0 variant dans D.

D'après un théorème classique de la théorie des limites, il existe au moins un point Q ou $y^0=b$ appartenant au domaine D ou à ses points frontières et tel que, pour *des* valeurs y^0 tendant vers b, le module d'une branche, soit σ_1, de $\sigma(y^0)$ tende vers S. Il suit de là (n° 24) qu'il existe dans le champ des x au moins un point, soit x_1, distinct des ξ, et qui jouit de la propriété suivante : pour *des* valeurs de y^0 tendant vers b, l'intégrale $y\left(x, y^0, \overline{x^0}\right)$ a un point critique α tendant vers x_1 et donnant à $\sigma(y^0)$ une valeur dont le module tend vers S; la valeur de y correspondant à $x=\alpha$ tend vers une racine y_1 de $Q(y_1, x_1)=0$.

Considérons donc l'intégrale à deux branches $Y(x)$ définie par $x=x_1$, $y=y_1$; une de ses valeurs pour $x=\overline{x^0}$ coïncide nécessairement avec b. La branche de la fonction $\sigma(y^0)$ qui, pour $y^0=b$, correspond à $\alpha=x_1$, est algébroïde finie et différente de zéro pour $y^0=b$; mais, d'autre part, son module est égal à S et, par suite, on a

$$|\sigma(y^0)|\leqq|\sigma(b)|$$

pour y^0 voisin de b, *ce qui est impossible* [2].

---

(1) Du moment que M a été pris très voisin de L et l très petit, la quantité $r(y^0)$ est très voisine de zéro dans le domaine D voisin de L, et par suite aussi $r(\varepsilon y^0)$, $r(\varepsilon^2 y^0)$, car D se transforme en lui-même par une rotation de 180° ou de 240° autour de M. Comme $r(y^0)$ s'annule en tout point de $\mathcal{C}$, il en est de même du produit $s=r(y^0)\,r(\varepsilon y^0)\,r(\varepsilon^2 y^0)$. Ce produit s'annule donc en tout point de $\mathcal{C}'$. De plus, la limite supérieure de $s(y^0)$ dans D est finie (et même petite).

(2) Quand une fonction analytique est algébroïde pour une valeur de la variable, il est impossible que son module soit maximum pour cette valeur.

Nous avons donc démontré ainsi ce théorème :

THÉORÈME. — *Il est impossible que l'ensemble fermé $\mathcal{E}$ du plan des y^0 comprenne un ensemble continu.*

La démonstration précédente suppose $n = 2$. Elle s'étend moyennant quelques complications au cas de n quelconque. On démontre que, quand y^0 tend vers un point c de $\mathcal{E}$, un point critique mobile au moins, soit $x = \alpha$, de $y(x, y^0, \overline{x^0})$ tend vers un point ξ. On en déduit ensuite que $\mathcal{E}$ ne peut comprendre d'ensemble continu [1].

26. *Cas où l'ensemble fermé $\mathcal{E}$ ne comprend aucun ensemble continu.* — Considérons une intégrale $y(x)$ à n branches, et les combinaisons symétriques $A_{n-1} = \Sigma y_1$, $A_{n-2} = \Sigma y_1 y_2$, ... de ces n branches. Les expressions A_{n-1}, A_{n-2}, ... sont des fonctions uniformes de x et de y^0, qui, dans le champ des x, n'ont pas de points transcendants en dehors des points ξ et dans le champ des y^0 n'ont pas de points transcendants en dehors de l'ensemble discontinu $\mathcal{E}$.

Les fonctions $y(x)$ vérifient la relation

$$(3) \qquad y^n + A_{n-1}(x, y^0, \overline{x^0})y^{n-1} + \ldots + A_0(x, y^0, \overline{x^0}) = 0.$$

Inversement, on a

$$(4) \qquad (y^0)^n + A_{n-1}(\overline{x^0}, y, x)(y^0)^{n-1} + \ldots + A_0(\overline{x^0}, y, x) = 0.$$

Si les coefficients $A_j(x, y^0, \overline{x^0})$ admettent dans le champ des y^0 un point transcendant isolé, ce point est un point essentiel de Weierstrass, et nous savons (n° 5) que les deux équations (3) et (4) ne peuvent avoir lieu simultanément.

Donc, *les A_j sont ou des fonctions rationnelles en y^0, ou des fonctions admettant un ensemble parfait et partout discontinu de points transcendants.*

Je dis que, dans ce dernier cas, aucun des coefficients $A_j(y^0)$ ne peut être indéterminé dans le voisinage d'un point singulier $y^0 = c$.

En effet, s'il en est autrement, une racine au moins de (3), soit $y = y_1(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ est indéterminée quand y^0 tend vers c. Or,

---

[1] *Voir* la thèse de M. Zoretti (*Journal de Mathématiques*, 1906).

considérons les valeurs au point $\bar{x}$ de toutes les intégrales $y(x)$ réellement exceptionnelles. Ces valeurs forment dans le plan des y, un ensemble soit $\mathcal{E}''_x$, *partout discontinu*. Si $y_1(\bar{x}, y^0, \overline{x^0})$ est indéterminé quand y^0 tend vers c, il existe, en dehors de l'ensemble $\mathcal{E}_x$, une valeur Y vers laquelle (¹) tend $y(\bar{x}, y^0, \overline{x^0})$ pour DES valeurs de y^0 tendant vers c. Or, l'intégrale $y(x)$ définie par $x = \bar{x}$, $y = Y + \varepsilon$ (ε étant nul ou petit), a pour $x = x^0$ n valeurs vérifiant (4) et distinctes de c; pour certaines valeurs de ε, elle devrait en avoir une $(n+1)^{\text{ième}}$ très voisine de c, ce qui est impossible.

En conséquence, si les $A_j(\bar{x}, y^0, \overline{x^0})$ admettent un ensemble parfait partout discontinu de points transcendants $y^0 = c$, chaque fonction A_j est ou continue ou infinie pour $y^0 = c$ et, dans ce dernier cas, $\frac{1}{A_j}$ est continu pour $y^0 = c$.

Or, de telles fonctions ne peuvent exister si l'on admet le théorème suivant :

THÉORÈME B. — *Une fonction uniforme, continue dans une aire* D, *et qui est holomorphe dans cette aire sauf peut-être pour un ensemble parfait partout discontinu de points singuliers, est holomorphe dans toute l'aire.*

Ce théorème a été démontré par M. Zoretti dans sa thèse. Toutefois, sa démonstration prête à certaines critiques. Il serait très intéressant que le théorème B fût mis hors de toute discussion.

Ce théorème une fois admis, nous aboutissons à la conclusion suivante :

Quand les intégrales $y(x)$ d'une équation

$$\text{(1)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)} \qquad \text{(P, Q polynomes en } y, x)$$

ont n branches au plus, l'intégrale générale $y(x, y^0, \overline{x^0})$ est une fonction rationnelle de y^0.

La démonstration s'étend sans peine au cas où les coeffi-

(¹) Il en existe même une infinité formant un ensemble continu.

cients $a_j(x)$, $b_l(x)$ des polynomes P et Q en y sont des fonctions transcendantes de x à un nombre fini de branches, qui n'admettent qu'un ensemble dénombrable de points singuliers.

27. *Conclusions sur les équations dont les intégrales $y(x)$ ont n branches au plus.* — Des deux méthodes que nous venons d'indiquer [1] pour traiter la question posée, la première résout complètement la question dans le cas de $n = 2$, mais pour être étendue au cas de n quelconque elle exigerait la démonstration préalable d'un théorème de la théorie des fonctions, à savoir le théorème A du n° **21**, théorème qui, dans le cas le plus simple, exprime que la *fonction $x(y)$ inverse d'une fonction entière $y(x)$ ne saurait présenter dans le champ des y qu'un ensemble dénombrable de points singuliers transcendants.*

La seconde méthode s'applique d'elle-même au cas de n quel-

---

(1) On pourrait suivre une troisième méthode dont le principe est le suivant : quand y^0 tend vers une des valeurs exceptionnelles c, un point critique mobile $x = \alpha$ tend vers un point ξ, soit $\xi = 0$, la valeur correspondante de y, à savoir $\beta = y(\alpha, y^0, \overline{x^0})$, tendant vers une des valeurs, soit $y = 0$, définie par $Q(\alpha, \beta) = 0$. Supposons que x ne soit pas en facteur dans $Q(x, y)$ (pour y arbitraire) : le couple $x = 0$, $y = 0$ doit annuler non seulement Q, mais P ; autrement, l'équation (1) serait régulière pour $x = 0$, $y = 0$ et le raisonnement du n° 24 s'appliquerait. La fraction $\frac{P}{Q}$ est donc de la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$, $y = 0$. Admettons maintenant que nous soyons dans un cas où l'intégrale peut se mettre sous la forme

$$(e) \qquad X(x, y), Y(x, y)^s = C \qquad (C = \text{const. arbitraire}),$$

X, Y désignant deux fonctions holomorphes à l'origine $x = 0$, $y = 0$, et les deux courbes $X = 0$, $Y = 0$ ayant l'origine pour point simple commun. Par hypothèse, les intégrales $y(x)$ étant des fonctions à n branches au plus, on voit aussitôt que la constante numérique s doit être réelle et commensurable (positive ou négative). Pour une certaine valeur de C (correspondant à $x = \overline{x^0}$, $y = c$), la courbe (e) doit se décomposer : or cela n'est possible, si s est positif, que pour $C = 0$. Si s est négatif, soit $s = -\frac{j}{k}$, cela n'est possible que pour $C = 0$ et $C = \infty$ pour $C = 0$, par exemple, k branches d'intégrale $y(x)$ viennent se confondre avec la courbe $X = 0$. La méthode consisterait à étendre ces résultats à toutes les singularités d'une équation (1), si compliquées qu'elles fussent. Autrement dit, il faudrait démontrer que, parmi toutes les branches d'intégrales $y = f(x)$ qui existent pour x voisin de ξ, celles qui correspondent à des courbes intégrales décomposées ou confondues sont en nombre fini, ou du moins sont dénombrables.

conque, mais elle suppose un autre théorème de la théorie des fonctions, à savoir le théorème de M. Zoretti sur les fonctions uniformes admettant un ensemble parfait discontinu de points singuliers transcendants (théorème B du n° 26). Elle serait pleinement satisfaisante si ce théorème était établi d'une façon irréprochable.

Il est intéressant de constater le rôle essentiel que jouent deux propositions d'apparence abstraite et générale de la théorie des fonctions dans un problème aussi naturel et simple que celui-ci.

Étudier les propriétés des intégrales $y(x)$ d'une équation différentielle algébrique du premier ordre et du premier degré, quand ces intégrales sont des fonctions à n branches au plus.

28. Les considérations précédentes démontrent dans le cas de $n=2$ et mettent hors de doute dans le cas de n quelconque, ce fait que l'intégrale générale d'une telle équation dépend algébriquement de la constante y^0 [1].

Posons-nous maintenant la question suivante :

Quand chaque intégrale $y(x)$ d'une équation

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(y, x)}{Q(y, x)} \qquad (P, Q \text{ polynomes en } y, x) \tag{1}$$

acquiert au plus n valeurs autour des points critiques mobiles, l'intégrale générale est-elle une fonction algébrique de y^0 [2]?

---

[1] Remarquons que, cette question une fois résolue, une autre question se dose encore :

Existe-t-il des équations (1) *dont chaque intégrale a un nombre fini de valeurs, sans que ce nombre admette une limite supérieure?*

Tous les raisonnements précédents supposent, en effet, ce nombre *au plus égal* à n. Bien que l'existence de telles équations soit tout à fait invraisemblable, la question demanderait à être tranchée rigoureusement.

[2] Adoptons, pour un instant, la définition proposée au n° 13 : traçons à partir de chaque point ξ des demi-droites (*coupures*) sans point commun, et supposons que l'intégrale $y(x)$ acquière au plus n valeurs quand x varie sans franchir ces coupures. L'intégrale générale $y(x)$ est-elle nécessairement une fonction algébrique de y^0? La réponse est alors sûrement négative, comme le montre l'exemple du n° 13, où y acquiert deux déterminations ou une seule suivant que y^0 est intérieure ou non à une certaine aire.

Bien que la réponse doive bien vraisemblablement être affirmative, une méthode très différente de celles des nos 21 ou 26 sera nécessaire pour résoudre la question. En effet, d'une part, la méthode du no 21, dans le cas de $n = 2$, nous montre seulement que $y_1 + y_2$ et $y_1 y_2$ sont des fonctions de x à points critiques fixes mais qui admettent ici une infinité de branches. D'autre part, la méthode des nos 24-26 s'appuie sur ce fait que quand l'intégrale $y(x, y^0, \overline{x^0})$ tend vers une intégrale exceptionnelle $y(x, c, \overline{x^0})$, un point critique mobile au moins, soit $x = \alpha$, tend vers un point ξ. Or, quand les intégrales $y(x)$ admettent une infinité de branches, il peut se faire qu'un point critique mobile $x = \alpha$ devienne indéterminé quand y_0 tend vers c. C'est ce que montre l'exemple $y' = -\frac{2y^3}{x}$ dont l'intégrale générale définie par $x^0 = 1$, $y = y_0$ est

$$y = \frac{y_0}{\sqrt{1 + y_0^2 \log x}};$$

pour $y^0 \neq 0$, $y(x)$ acquiert deux valeurs autour du point critique mobile $x = e^{-\frac{1}{y_0^2}}$; pour $y^0 = 0$, $y(x)$ se réduit à $y \equiv 0$, et le point critique $x = e^{-\frac{1}{y_0^2}}$ est complètement indéterminé quand y^0 tend vers zéro.

29. Si les coefficients $a_j(x)$, $b_l(x)$ des polynomes P et Q en y ne sont non plus rationnels mais sont des fonctions de x à un nombre fini de branches admettant un ensemble dénombrable de points transcendants, les méthodes des nos 21-26 s'appliquent encore ainsi que leurs conclusions. Mais si les coefficients sont des fonctions analytiques quelconques, la réponse aux questions des nos 27 et 28 est négative.

QUELQUES PROBLÈMES GÉNÉRAUX RELATIFS AUX ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

30. *Sur la fonction* $y(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$. — Considérons une équation (1) où P et Q sont des polynomes en y dont les coefficients sont des fonctions uniformes de x. Soient $\overline{x^0}$ et $\overline{x}$ deux valeurs nu-

mériques, distinctes des valeurs ξ, et $y = \varphi(x, y^0, \overline{x^0})$ l'intégrale définie par les conditions initiales $x = \overline{x^0}$, $y = y^0$. Laissant à x la valeur numérique $\overline{x}$, prolongeons analytiquement cette fonction dans tout le champ des y^0. Les différentes branches de cette fonction représentent, pour y^0 donné, une branche d'une intégrale $y(x)$ de (1); appelons $\varphi_1(x, y^0, \overline{x^0})$ celle des branches qui pour $x = -\overline{x^0}$ se réduit à y^0; les autres branches, pour $x = \overline{x^0}$, prennent les valeurs

$$\varphi_2(\overline{x^0}, y^0, \overline{x^0}) = \psi_2(y^0), \qquad \varphi_3(\overline{x^0}, y^0, \overline{x^0}) = \psi_3(y^0), \qquad \ldots.$$

Toutes ces branches $\varphi_2(x, y^0, \overline{x^0})$, $\varphi_3(x, y^0, \overline{x^0})$ se déduisent de la branche $\varphi_1(x, y^0, \overline{x^0})$ en y remplaçant y^0 pour $\psi_2(y^0)$, $\psi_3(y^0)$, etc. On peut toujours définir la branche $\varphi_1(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ de façon qu'elle soit algébroïde pour toute valeur de y^0, finie ou non. Toutes les autres branches seront également algébroïdes pour toute valeur de y^0, si les diverses expressions $\psi_2(y^0)$, $\psi_3(y^0)$, ... sont elles-mêmes algébroïdes pour toute valeur de y^0; mais si $\psi_2(y^0)$, par exemple, admet une valeur $y^0 = c$ comme singularité transcendante, la fonction $\varphi_2(x, y^0, \overline{x^0})$ admettra aussi cette singularité transcendante $y^0 = c$ pour x quelconque.

Considérons les diverses branches d'une intégrale $y(x)$ qui se permutent autour des points critiques mobiles, et soient $y^0, y_1^0, y_2^0, \ldots$ les valeurs que prennent en $\overline{x^0}$ ces diverses branches. Ces branches, dans tous les cas, correspondent à autant de déterminations de la fonction $\varphi(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$; mais il peut se faire qu'*elles n'épuisent pas toutes les déterminations de cette fonction*. C'est ainsi que dans l'exemple du n° 16, la fonction $\varphi(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ a une infinité de branches, bien que chaque intégrale $y(x)$ soit une fonction à deux branches au plus. Insistons sur ce cas remarquable.

31. *Intégrales exceptionnelles.* — Soit $Y(x)$ l'intégrale définie par $x = x^0$, $y = b$; l'intégrale $y(x, y^0, \overline{x^0})$ pour y^0 voisin de b, acquiert, quand x tourne autour des points critiques mobiles, des valeurs qui pour $x = \overline{x^0}$ sont égales à $y_1^0, y_2^0, \ldots$. Supposons qu'il existe un ensemble dénombrable de contours fermés, partant de $\overline{x^0}$

pour y revenir, *indépendants de* y^0 et tels, que pour *toutes les valeurs* y^0 *voisines de* b, $y(x, y^0, \overline{x^0})$ acquiert, après avoir parcouru ces contours, *toutes* les valeurs y_1^0, y_2^0, ... Quand il en est ainsi, y_1^0, y_2^0, ... sont des fonctions de y^0 algébroïdes pour $y^0 = b$. Quand il n'en est pas ainsi, nous dirons que l'intégrale $Y(x) = y(x, b, \overline{x^0})$ est *une intégrale exceptionnelle* I.

L'intégrale $Y(x)$ égale à b pour $x = \overline{x^0}$ acquiert en $\overline{x^0}$, quand x varie dans son plan *sans tourner autour des points fixes* ξ, les valeurs Y_1^0, Y_2^0, ...; si, pour y^0 voisin de b, on peut établir entre ces valeurs et les valeurs analogues y_1^0, y_2^0, ..., de

$$y(x, y^0, \overline{x^0}),$$

une correspondance *univoque,* telle que y_j^0 tende vers Y_j^0 quand y^0 tend vers b, Y n'est sûrement pas une intégrale exceptionnelle I. La même conclusion s'applique si l'on considère toutes les déterminations de $Y(x)$ et de $y(x)$, quand x varie *arbitrairement,* et si l'on peut établir entre ces déterminations une correspondance univoque jouissant de la même propriété.

Il suit de là que $Y(x)$ ou $y(x, b, \overline{x^0})$ ne peut être une intégrale singulière I sans qu'il existe des *permutations évanouissantes* pour y^0 tendant vers b; autrement dit, l'intégrale $y(x, y^0, \overline{x^0})$, en outre des branches qui tendent univoquement vers celles de $Y(x)$ pour y^0 tendant vers b, possède au moins une autre branche, soit $z(x)$, se permutant avec les précédentes autour d'un point critique mobile, et cette permutation s'évanouit [1] pour $y^0 = b$.

---

[1] La branche $z(x)$, quand y^0 tend vers b, ou bien tend vers une intégrale $Z(x)$ qui n'est pas une branche de $Y(x)$, ou bien ne tend vers aucune limite, ou bien tend vers la même branche de $Y(x)$ qu'une autre branche de $y(x)$ déjà considérée. Par exemple, si l'intégrale générale est $\frac{y(y-2)}{x} = \text{const.} = y^0(y^0-2)$, (pour $\overline{x^0} = 1$), l'intégrale $y \equiv 0$ est exceptionnelle, et quand y^0 tend vers zéro, la seconde branche de $y(x)$ tend vers $y \equiv 2$. Dans l'exemple du n° 4 où l'on change y en $\frac{1}{y}$, l'intégrale générale est $y e^{-\frac{1}{y}} = \frac{y^0 e^{-\frac{1}{y^0}}}{x}$, $(\overline{x^0} = 1)$; l'intégrale $y = 0$ est exceptionnelle; pour y^0 voisin de zéro, la branche de $y(x)$ qui est égale à y pour $x = 1$, se permute avec une branche $z(x)$ autour du point $x = -y^0 e^{\left(1-\frac{1}{y^0}\right)}$ et quand y^0 tend vers zéro, $z(x)$ ne tend vers aucune limite déterminée. Enfin

Considérons dans le plan des y^0, tous les points $y^0 = c$ tels que l'intégrale $y(x, c, \overline{x^0})$ soit une intégrale exceptionnelle I. On voit bien aisément (comme au n° 5) que l'ensemble E de points c ainsi défini est *un ensemble fermé*.

Quand la fonction $y = \varphi(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ possède d'autres branches que celles qui correspondent aux déterminations de la même intégrale $y(x)$, permutables autour des points critiques mobiles, l'ensemble E comprend sûrement une ligne, soit L, qui jouit de la propriété suivante :

Une certaine branche de la fonction $y = \varphi(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ prolongeable à travers cette ligne L représente d'un côté de L une intégrale $y(x)$ dont une détermination est égale à y^0 pour $x = \overline{x^0}$, et sur L et de l'autre côté de L une intégrale dont aucune branche n'est égale à y^0 pour $x = \overline{x^0}$.

C'est ce qui a lieu dans l'exemple du n° 16 : l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction à deux ou à une branche suivant que y^0 est intérieur ou non à une certaine aire D' du plan des y^0. La frontière de D' est une ligne L qui jouit précisément de la propriété énoncée (¹).

32. L'exemple du n° 17 nous montre que des circonstances analogues peuvent se présenter quand les coefficients $a_j(x)$, $b_l(x)$ des polynomes P, Q en y sont des fonctions à une infinité de valeurs, mais n'ayant qu'un nombre *fini* de points singuliers.

Mais supposons maintenant que P et Q soient des polynomes en x, y; est-il possible que les mêmes circonstances se présentent? Autrement dit, les questions qui se posent sont les suivantes :

---

si l'intégrale générale est $y^2 = \dfrac{Cx}{x - C}$, c'est-à-dire $\dfrac{xy^2}{y^2 + x} = \dfrac{y_0^2}{y_0^2 + x}$, $(\overline{x^0} = 1)$, l'intégrale $y \equiv 0$ est exceptionnelle, et quand y^0 tend vers zéro, les deux branches de $y(x, y^0)$ tendent vers $y \equiv 0$.

(¹) La définition des intégrales exceptionelles I ne coïncide pas tout à fait avec la définition des intégrales réellement exceptionnelles I définies au n° 22 dans le cas où les intégrales $y(x)$ ont n valeurs au plus. L'ensemble E des points c correspondant à la nouvelle définition se compose, dans l'exemple du n° 16, de tous les points *frontières* de l'aire D', tandis que l'ensemble $\mathcal{E}$ des points c correspondant à l'ancienne définition contient tous les points de D' et de son contour. Les deux ensembles E et $\mathcal{E}$ coïncident si $\mathcal{E}$ ne comprend aucune aire.

Soit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)} \qquad (1) \qquad \text{(P, Q polynomes en } y, x\text{)}$$

une équation différentielle algébrique du premier ordre et du premier degré, et soit $y(x, y^0, x^0) = \varphi(x, y^0, x^0)$ *l'intégrale de cette équation qui, pour* $x = x^0$, *est égale à* y^0.

1° Si laissant à x et x^0 des valeurs numériques $\overline{x}$ et $\overline{x^0}$ distinctes des valeurs ξ, on prolonge analytiquement la fonction $\varphi(x, y^0, x^0)$ dans le champ des y^0, cette fonction acquiert sûrement *toutes* les déterminations correspondant aux diverses branches de l'intégrale $y(x, y^0, x^0)$ qui se permutent quand x varie dans son plan sans tourner autour des points *fixes* ξ (1). *Peut-il arriver que cette fonction* $\varphi(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$ *possède d'autres déterminations?*

2° *Les intégrales exceptionnelles* I *peuvent-elles former un ensemble non dénombrable?*

La réponse à ces deux questions est *affirmative* quand les coefficients $a_j(x)$, $b_l(x)$ des polynomes P et Q en y *ne sont pas algébriques*. Il est très vraisemblable qu'elle est *négative* quand ces coefficients sont *rationnels ou algébriques :* mais une démonstration rigoureuse apparaît comme très difficile. Et pourtant c'est là une question que l'étude analytique générale des équations (1) ne semble guère pouvoir esquiver.

Remarquons que la seconde question renferme en quelque sorte la première, en ce sens que si la seconde est résolue par la négative, il en est de même *a fortiori* de la première.

33. Soient $y(x, y^0, \overline{x^0})$ l'intégrale générale de (1), et $y(x, c, \overline{x^0})$ une intégrale exceptionnelle I. La valeur $y^0 = c$ peut être (mais n'est pas nécessairement) un point singulier transcendant d'une ou plusieurs branches de la fonction $y = \varphi(\overline{x}, y^0, \overline{x^0})$. L'ensemble E des points c du plan des y^0 est toujours *fermé;* s'il est

---

(1) Si l'on prolonge la fonction $\varphi(x, y^0, x^0)$ dans le champ des x^0, on obtient sûrement toutes les branches de l'intégrale $y(x, y^0, x^0)$ qui se permutent quand x tourne tant autour des points critiques fixes que des points critiques mobiles. Mais peut-il en exister d'autres? Dans tous les cas, il est plus simple de prendre y^0 comme constante arbitraire plutôt que x^0.

dénombrable, l'ensemble dérivé est contenu dans E et est lui-même dénombrable.

Dans l'exemple du n° 4, l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(y+1)}$$

possède deux intégrales exceptionnelles I, à savoir $y \equiv 0$ et $y \equiv \infty$. La fonction $y = \varphi(x, y^0, x^0)$ est définie par la relation

$$y e^y = y^0 e^{y_0} \frac{x}{x^0}.$$

$y^0 = 0$ est un point transcendant d'une infinité de branches de $\varphi(\overline{x}, y^0 \overline{x^0})$, de même que $y^0 = \infty$. Lorsque y^0 tend vers zéro, le point critique mobile unique $x = \alpha$ de $y(x)$, à savoir

$$x = -\frac{x^0}{y^0} e^{-(1+y^0)},$$

tend vers le point $x = \infty$ qui est un point ξ; quand y^0 tend vers l'infini, ce point critique est complètement indéterminé.

Comment cette dernière circonstance peut-elle se produire? Pour *des* valeurs de y^0 de module indéfiniment croissant, le point critique $x = \alpha$ tend vers 1 par exemple; l'intégrale $y(x)$, égale à y^0 pour $x = x^0$, prend donc la valeur $y = -1$ quand on va de x^0 à un certain point α voisin de 1 sur un certain chemin L; mais ce chemin L, comme on le voit aisément, tourne autour du point critique fixe $x = 0$ un nombre de fois qui croît indéfiniment avec $|y^0|$. Si l'on veut que L reste extérieur à un cercle de centre $x = 0$ et de rayon petit mais donné ε, la longueur de L croît indéfiniment avec $|y^0|$.

On conçoit, d'après cela [1], comment la même circonstance ne peut se produire quand le nombre des branches des intégrales $y(x)$ est au plus égal à un nombre fini n. Nous avons montré (n° 24) que, dans ce cas, tout point critique mobile $x = \alpha$, autour duquel

---

[1] Si y^0 tend vers un point c sur un chemin *continu*, des considérations analogues montrent que tout point critique mobile $x = \alpha$ autour duquel se permutent deux branches de $y(x)$ qui cessent de permuter pour $y_0 = c$, ou bien est indéterminé, ou bien tend vers un point ξ.

se permutent deux branches de $y(x, y^0, \overline{x^0})$ qui cessent de se permuter pour $y^0 = c$, tend nécessairement vers un point ξ quand y^0 tend vers c.

34. *Équations différentielles algébriques de premier ordre.* — Toutes les conclusions et tous les problèmes qui précèdent ont leurs analogues ([1]) pour les équations

$$\text{(I)} \qquad F(y', y, x) = 0,$$

où F est un polynome en y', y et x.

En particulier, la proposition générale du n° 1 s'applique à ces équations : *Si l'on excepte un nombre fini de points $x = \xi$ qui se déterminent algébriquement sur l'équation, les intégrales $y(x)$ de* (I) *n'admettent que des points singuliers mobiles, qui sont tous algébriques. Seuls les points fixes ξ peuvent être des points singuliers transcendants.*

Convenons, comme au n° 5, de dire que l'intégrale *générale* de E est une fonction à n branches si chaque intégrale $y(x)$ est une fonction à n branches, exception étant faite peut-être pour certaines intégrales formant un ensemble dénombrable.

Convenons de dire, de même, que l'intégrale *générale* possède n déterminations permutables autour des points critiques mobiles, si *chaque* intégrale $y(x)$ acquiert exactement n déterminations quand x varie arbitrairement mais sans tourner ([2]) autour des points ξ, exception étant faite peut-être pour certaines intégrales formant un ensemble dénombrable.

Le théorème qui correspond au théorème du n° 8 s'énonce ainsi :

Quand l'intégrale générale acquiert seulement n déterminations autour des points critiques mobiles (en particulier quand c'est une fonction à n branches), l'intégrale $y(x)$ de l'équation (I) *est une fonction algébrique de y^0, et cette équation s'intègre algébriquement, ou bien par une transfor-*

([1]) Voir mes *Leçons de Stockholm*, p. 46-98, 111-140, 155-172.

([2]) Le sens de cette expression est le même qu'au n° 6 : le contour fermé C ne tourne pas autour du point ξ, si, quand x a parcouru une fois tout le contour C, l'argument du vecteur $\overline{\xi x}$ reprend la même valeur.

mation

$$u = r(y', y, x) \quad (r \text{ rationnel en } y', y \text{ algébrique en } x),$$

se ramène soit à une équation de Riccati

$$\text{(II)} \qquad \frac{du}{dx} = A(x)u^2 + B(x)u + C(x),$$

soit à la quadrature

$$\text{(III)} \qquad \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = A(x)\,dx,$$

où A, B, C *sont algébriques et où* k^2 *désigne une constante.*

De plus, *pour n donné,* on sait reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations rationnelles, si l'intégrale générale de (I) jouit de la propriété énoncée, et si oui, on sait effectivement intégrer l'équation (I) ou la ramener à l'équation de Riccati (II) ou à la quadrature (III).

35. Proposons-nous le même problème *sans que n soit donné* et en écartant le cas où l'équation (I) s'intègre algébriquement. Autrement dit, cherchons à *reconnaître si l'intégrale générale* $y(x)$ *de* (I) *est une fonction* TRANSCENDANTE *qui n'acquiert qu'un nombre fini,* NON DONNÉ, *de valeurs autour des points critiques mobiles, ce nombre étant le même pour chaque intégrale, sauf peut-être pour un ensemble dénombrable d'intégrales particulières.*

La réponse est la suivante : *On sait, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, reconnaître s'il en est ou non ainsi, ou intégrer l'équation par la quadrature de différentielle totale*

$$\int M(y, x)(dy - y'\,dx) = \text{const.},$$

M *désignant une fonction algébrique de* (x, y) *et* y' *la fonction algébrique de* x, y *définie par* (I).

Dans ce dernier cas, pour que l'équation (I) rentre dans la catégorie étudiée, il faut et il suffit que, $\bar{x}$ étant quelconque et u désignant $\int M(y, \bar{x})\,dy$, l'une des deux expressions $e^{\lambda u}$ ou $\frac{sn\lambda u}{k^2}$ soit

algébrique en y, pour des valeurs convenables des constantes λ et k^2. On peut dire encore que l'équation $\frac{du}{dy} = M(y)$ doit définir une fonction $y(u)$ à un nombre fini de branches.

Remarque. — Dans le dernier cas exceptionnel dont nous venons de parler, le problème posé se trouve en fait ramené au même problème concernant une équation (I) où x ne figure pas. Le cas où x ne figure pas apparaît donc, au point de vue qui nous occupe, comme un cas exceptionnellement difficile [1] auquel se ramènent tous les cas où le problème posé n'est pas complètement résolu.

De plus, comme nous l'avons remarqué déjà au n° 9, le cas où l'équation s'intègre *algébriquement* échappe à la méthode; le problème posé est donc plus facile à résoudre quand l'intégrale générale est transcendante que quand elle est algébrique.

36. Enfin, il est impossible de ne pas se demander, comme au n° 18, *quelle est la nature de l'intégrale de* (I) *quand chaque intégrale $y(x)$ est une fonction à n branches* AU PLUS. Pour $n = 2$, la méthode du n° 19 montre rigoureusement que $y(x)$ *est une fonction algébrique de* y^0, et dès lors les conclusions du n° 34 s'appliquent; mais pour pouvoir être étendue au cas de n quelconque, la méthode exigerait la démonstration préalable du théorème (A) (p. 169). Quant à la méthode des n°s 23-26, elle peut être appliquée aux équations (I), et elle aboutit aussi à cette conclusion que $y(x)$, dans le cas étudié, est une fonction algébrique de y^0. Mais elle s'appuie sur le théorème (B) (p. 176).

D'une manière générale, toutes les propositions démontrées dans le cas où y' entre dans (I) au premier degré, s'étendent sans peine au cas où ce degré est quelconque.

---

(1) Le problème qui consiste à reconnaître si une intégrale abélienne a une ou deux périodes renferme en particulier les problèmes d'Abel : reconnaître si l'intégrale $\int \frac{dx}{(x+A)\sqrt{4x^3 - y_2 x - y_3}}$ n'a qu'une période. Les solutions partielles données par Tchebycheff et Zolotaref montrent le caractère *arithmétique* des difficultés du problème.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

40446 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55



